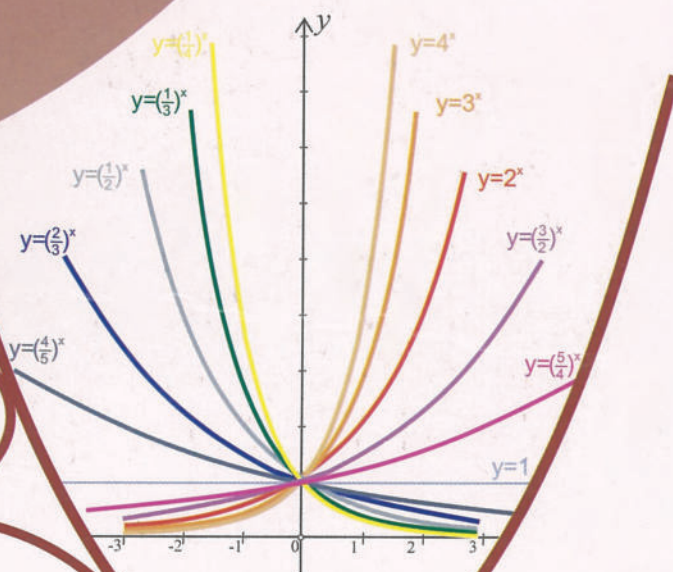
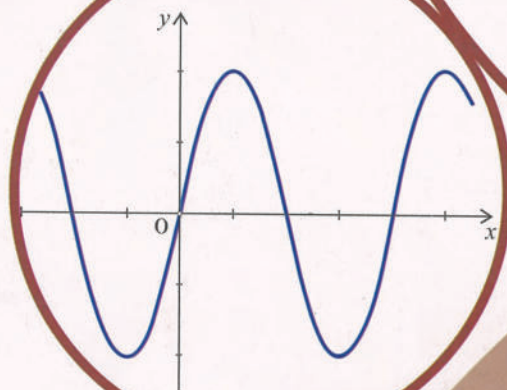


ЈОРДАНКА МИТЕВСКА
ИВАН ТРАЈКОВ
ЛИЛЈАНА ГРИБОВСКА - ПОПОВИЌ

МАТЕМАТИКА

ЗА III ГОДИНА НА
РЕФОРМИРАНОТО
ГИМНАЗИСКО
ОБРАЗОВАНИЕ

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



3

Јадранка МИТЕВСКА
Иван ТРАЈКОВ
Лилјана ГРИБОВСКА - ПОПОВИЌ

МАТЕМАТИКА

ЗА III ГОДИНА

НА РЕФОРМИРАНОТО ГИМНАЗИСКО
ОБРАЗОВАНИЕ

II издание



ПРОСВЕТНО ДЕЛО АД
Скопје, 2018

Уредник
Весна Дукоска

Рецензенти
Марија ОРОВЧАНЕЦ, вонреден професор на ПМФ

Фросина МИТРУШЕВА, професор во ДСУ "Раде Јовчевски
- Корчагин" - Скопје

Слободанка БОЦЕВА, професор во ДСУ "Браќа Миладиновци
- Скопје

Со Решение на министерот за образование и
наука бр. 07-5821/1 од 23.09.2003 год. се одобрува
употребата на овој учебник

ПРЕДГОВОР

Учебникој шћо го имаће пред себе е наменет за изучување на задолжителниот предмет математика во шрејта година на реформираното гимназиско образование кој се изучува со неделен фонд од три часа. Тој е комилейно изработен според наставната програма по математика одобрена од Министерството за образование и наука во 2002 година.

Почитувајќи го структурирањето на содржините предвидени со наставната програма, во учебникој материјалот е поделен во четири теми: **Експоненцијална и логаритамска функција, Тригонометрија, Елементи од комбинаторика и веројатности и Аналитичка геометрија.** Специфичностите и разликите на обработуваниот материјал бараа внимателен и различен пристап кон изложувањето на наставните содржини од страна на авторите. Долгогодишното искуство во наставната практика им овозможи на авторите да имаат осет за потребите и барањата на учениците, па се надеваат дека успејат да се наметнат со стил близок и разбирлив за нив.

Во учебникој авторите водеа сметка за барањата и конкретните цели набележани во програмата, како и за психофизичките способности на учениците на оваа возраст. Затоа некаде објаснувањата се кратки и јасни, математички прецизно изложени, некаде обемни и појкрепени со доволен број примери и илустрации за да им овозможат на учениците полесно самостојно совладување на изложениот материјал. Во секоја тема теоретскиот дел е појкрепен со соодветно одбрани примери кои треба да му помогнат на ученикот да го следи материјалот и самиот логички да расудува и творечки да пристапува кон неговото изучување. Таму каде што е потребно примерите се илустрирани со јасни цртежи кои се во функција на подобро осознавање на изложениот материјал. По секоја наставна единица на ученикот му се понудени конкретни задачи, одмерени и методички подредени по тежина. Тие ќе му овозможат да се самопровери, бидејќи за сите на крајот од учебникој се дадени резултатите, за поенките унапредува за решавање, а на многу од нив и комилейни решенија. Истото така, на крајот од секоја тема се нудат задачи за вежбање, со цел учебникој да биде целина од теоретски и практичен дел и оптимално да се искористи, без потреба од друга дополнителна литература во изучувањето на материјалот.

И на крајот, авторите се надеваат дека нивната заложба содржините да ги презентираат, со неопходната математичка строгост на наједноставен можен начин, да ги збогатат со правилно одбрани, студиски обмислени и внимателно илустрирани примери, ќе им овозможи на учениците, водени од учебникој, самостојно совладување на материјалот предвиден за изучување во шрејта година на реформираното гимназиско образование.

мај, 2003 година

Авториите

СОДРЖИНА

Предговор	3
ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА	
1.1. Експоненцијална функција	7
1.1.1. Тек и график на експоненцијална функција	7
1.1.2. Експоненцијална равенка	16
1.2. Логаритамска функција	18
1.2.1. Поим за логаритам	21
1.2.2. Основни правила на логаритмирањето	25
1.2.3. Врски меѓу логаритми со различни основи	27
1.2.4. Тек и график на логаритамска функција	32
1.2.5. Логаритамски равенки	35
Задачи за повторување и утврдување	
ТРИГОНОМЕТРИЈА	
2.1. Тригонометриски функции од произволен агол	37
2.1.1. Проширување на поимот агол и мерење на агол	42
2.1.2. Дефиниција на тригонометриски функции од произволен агол	46
2.1.3. Дефиниција на тригонометриските функции во тригонометриска кружница.	49
2.1.4. Графичко определување на аголот и вредноста на тригонометриските функции за дадена вредност на една од функциите. Знак на тригонометриски функции	52
2.1.5. Вредности на тригонометриските функции од некои агли	56
2.1.6. Некои релации помеѓу тригонометриските функции	59
2.1.7. Пресметување на вредноста на тригонометриските функции според вредноста на една од нив	62
2.1.8. Основни својства на тригонометриските функции	68
2.1.9. Сведување на тригонометриски функции од произволен агол на тригонометриски функции од остар агол	73
2.2. График на тригонометриска функција	81
2.2.1. Тек и график на основните тригонометриски функции	90
2.2.2. Тек и график на функцијата $y = a \sin (bx+c)+d$	
2.2.3. Тек и график на функцијата $y = a \cos (bx+c)+d$	
2.3. Трансформирање на тригонометриски изрази	92
2.3.1. Адитивни теореми за тригонометриските функции	95
2.3.2. Тригонометриски функции од двоен и половина агол	98
2.3.3. Трансформирање на производ и збир на тригонометриски функции	
2.4. Тригонометриски равенки	101
2.4.1. Основни тригонометриски равенки	106
2.4.2. Решавање на некои тригонометриски равенки	
2.5. Решавање на произволен триаголник	112
2.5.1. Синусна теорема	116
2.5.2. Косинусна теорема	119
2.5.3. Примена на теоремите во некои задачи од практиката	122
Задачи за повторување и утврдување	

ЕЛЕМЕНТИ ОД КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЈАТНОСТ

3.1. Комбинаторика

3.1.1. Математичка индукција	125
3.1.2. Варијации	128
3.1.3. Пермутации	133
3.1.4. Комбинации	137
3.1.5. Биномна формула	142

3.2. Веројатност

3.2.1. Експеримент. Настан. Статистичка веројатност	146
3.2.2. Множество на случајни настани	150
3.2.3. Класична дефиниција за веројатноста	153
Задачи за повторување и утврдување	156

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

4.1. Координати на точка и вектор во правоаголен координатен систем

4.1.1. Правоаголен координатен систем	160
4.1.2. Операции со вектори зададени со координати во координатен систем	164
4.1.3. Растојание меѓу две точки	166
4.1.4. Делење на отсечка во даден однос	168

4.2. Права во рамнина

4.2.1. Експлицитен и општ вид равенка на права	172
4.2.2. Равенка на права што минува низ една точка. Равенка на права што минува низ две точки	176
4.2.3. Сегментен вид равенка на права	179
4.2.4. Пресек на две прави. Агол меѓу две прави	182
4.2.5. Услов за паралелност и нормалност на две прави	185
4.2.6. Нормален вид равенка на права	187
4.2.7. Растојание од точка до права	190
Задачи за повторување и утврдување (4.1 и 4.2)	194

4.3. Криви од втор ред

4.3.1. Кружница. Равенка на кружница	197
4.3.2. Заемна положба на права и кружница	201
4.3.3. Равенка на тангента и нормала во точка од кружницата	206
4.3.4. Елипса. Централна равенка на елипса	209
4.3.5. Заемна положба на права и елипса	214
4.3.6. Равенка на тангента и нормала во точка од елипсата	217
4.3.7. Хипербола. Равенка на хипербола	219
4.3.8. Заемна положба на права и хипербола	225
4.3.9. Равенка на тангента и нормала во точка од хиперболата	228
4.3.10. Парабола. Равенка на парабола	230
4.3.11. Заемна положба на права и парабола	234
4.3.12. Равенка на тангента и нормала во точка од параболата	236
Задачи за повторување и утврдување (4.3)	238

ОДГОВОРИ И РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

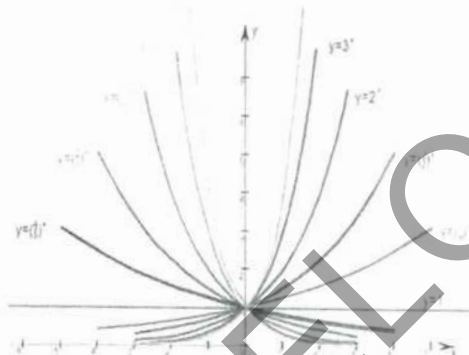
АЗБУЧНИК НА ПОИМИТЕ

242
267

ПРИРОДА. ЖИВОТ. МАТЕМАТИКА.



Лотосов цвет



Лотосов цвет од експоненцијални функции

Математиката е една од најголемите и најважните науки. Таа со своите откритија е основа за откритијата во другите природни науки. Во неа откритијата се редат спонтано, полека, трпеливо, континуирано, темелно, систематично. Токму во тоа е и нејзината сила и моќ. Нејзиниот придонес за цивилизацијата е огромен. Таа е *секаде, во секое време и на секое место*.

Нејзиното мото е: *Набљудувај, разбери, истрискажи, создавај!* Во природата постојат низа процеси кои математиката ги открива и веродостојно, на најекономичен начин ги соопштува. Еве еден пример за тоа:

Пример:

Во едно истражување популацијата на вински мушички a се зголемува според законот за експоненцијален прираст: $y = ae^{bt}$, каде y е бројот на мушички за време t . На почетокот имало одреден број мушички, по два дена имало 100, по четири дена 300 мушички. Колку мушички ќе има по пет дена?

Ако ги замениме овие информации во моделот според кој се одвива растењето на популацијата на вински мушички ќе го добиеме следниот систем равенки:

$$\begin{cases} 100 = ae^{2b} \\ 300 = ae^{4b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{100}{e^{2b}} \\ 300 = \frac{100}{e^{2b}} e^{4b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{100}{e^{2b}} \\ 3 = e^{2b} \end{cases}$$

Со логаритмирање на втората равенка од системот добиваме:

$$\ln 3 = \ln e^{2b} \Leftrightarrow \ln 3 = 2b \ln e \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \ln 3 \Rightarrow b \approx 0,5493.$$

Ако вредноста $b = \frac{1}{2} \ln 3$ ја замениме во првата равенка од системот, за a добиваме:

$$a = \frac{100}{e^{\frac{1}{2} \ln 3}} = \frac{100}{e^{\ln 3}} = \frac{100}{3}. \text{ Значи по пет дена ќе има } y = \frac{100}{3} e^{0,5493 \cdot 5} \approx 520 \text{ мушички.}$$

Во овој пример сигурно има многу прашања, поими и пресметки што ти се непознати. Одговорите на нив ќе ги најдеш во темата што следи. По совладувањето на содржините од истата и самиот ќе умееш да ги изведеш.

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

1.1. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА

Многу процеси во природата можат да се опишат со помош на експоненцијалната функција. Тоа се процесите на радиоактивно распаѓање, менувањето на атмосферскиот притисок со зголемувањето на надморската височина, зголемувањето на бројот на бактериите во процесот на нивното размножување, прекршувањето на светлината при минување низ воден слој и други. Затоа од интерес е испитувањето на овие функции.

1.1.1 ТЕК И ГРАФИК НА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА

Во претходната учебна година ја изучуваше функцијата $f(x) = x^2$, каде основата на степенот е променливата x , а показателот е константа, неа ја нарекувавме квадратна функција. Оваа учебна година ќе ја изучуваш функцијата од обликот $f(x) = 2^x$ (и слични на неа) каде основата е константа, а показателот (експонентот) е променливата x , неа ќе ја нарекуваме **експоненцијална функција**. За да можеме да ја дефинираме треба да го извршиме последното проширување на поимот степен, овој пат степен со показател ирационален број, со што ќе биде комплетирано дефинирањето на степен со показател реален број.

1. Проширување на поимот за степен

Познато ти е дека според дефиницијата за степен како производ од еднакви множители, симболот a^n , каде $a \in \mathbb{R}$, има смисла само за n природен број, бидејќи е можно да се помножат два, три, четири и т.н. множители кои се еднакви меѓу себе. Симболите: a^0 , a^{-1} , $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\sqrt{2}}$, a^{π} , ..., немаат смисла во множеството на природните броеви, бидејќи не може да се сфати бројот a да се множи сам со себе 0 пати, или (-1) пати, или половина пати, или ирационален број $\sqrt{2}$ пати. Затоа на симболот a^n , каде n не е природен број може да му се даде вредност само според дефиниција. Во досегашното изучување на поимот степен си се запознал со: дефинирањето на степен со показател цел број (тогаш беше воведено првото ограничување $a \neq 0$) и степен со показател рационален број, изразен како децимален број со конечен број на децимални места или бесконечен периодичен децимален број, (тогаш беше воведено второто ограничување $a > 0$). Познато ти е и дека за степени со показател цел, односно рационален број важат следните својства:

$$1^0. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$2^0. \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0;$$

$$3^0. \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$4^0. \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n;$$

$$5^0. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0;$$

$$6^0. \quad a^1 = a,$$

$$7^0. \quad a^0 \stackrel{def}{=} 1, a \neq 0;$$

$$8^0. \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0;$$

$$9^0. \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0; n > 1;$$

$$10^0. \quad \text{ако } a > 0, \text{ тогаш } a^n > 0.$$

Сега ќе покажеме како степенот a^x добива смисла, за $a > 0$ и x произволен ирационален број (непериодичен децимален број со бесконечен број на децимални места). Со тоа го имаме последното проширување на поимот степен со показател реален број, при што својствата $1^0 - 10^0$ и понатаму да важат.

Основната идеја е многу едноставна. За произволен ирационалниот број x , $x > 0$ ќе земеме $a^x \approx a^r$, каде r е рационален број кој има конечен број на децимални места и вредност приближна на вредноста на ирационалниот број x .

Знаеш дека $\pi = 3.1415926\dots$ Ако земеме $\pi \approx 3.14$, тогаш $a^\pi \approx a^{3.14}$ ($a > 1$). Уште поголема точност се добива ако земеме приближната вредност за π да има повеќе децимални места, т.е. поточно е $a^\pi \approx a^{3.14159}$.

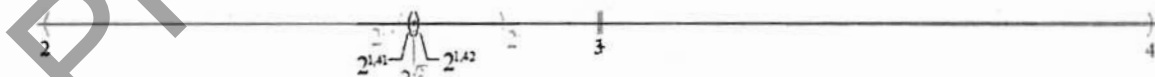
Или, на пример: $2^{\sqrt{2}} \approx 2^{1.41}$, при што ирационалниот број $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$, значи $1 < \sqrt{2} < 2$. И повторно, како и погоре поголема точност се добива доколку се земе приближната вредност за $\sqrt{2}$ да има повеќе децимални места и тогаш $2^{\sqrt{2}}$ припаѓа на секој од интервалите:

$$(2^1, 2^2) \supset (2^{1.4}, 2^{1.5}) \supset (2^{1.41}, 2^{1.42}) \supset (2^{1.414}, 2^{1.415}) \supset \dots$$

односно:

$$(2, 4) \supset (2.639, 2.828) \supset (2.657, 2.676) \supset (2.665, 2.667) \supset \dots$$

Интервалите се потесни и се приближуваат со зголемена точност кон бројот $2^{\sqrt{2}}$, што е илустрирано на цртеж 1. (Да напоменеме дека овде е zgodno да се употреби ознаката $A \supset B$, се чита A е надмножество од B , а значи B е подмножество од A)



црт.1.

Слично разгледување може да се спроведе и кога основата на степенот е број a , каде $0 < a < 1$.

Може да се покаже дека овие степени со рационални показатели, колку показателите повеќе се доближуваат до ирационалниот број (земајќи се повеќе децимални места), определуваат единствен реален број, така што да бидат исполнети својствата $1^0 - 10^0$.

Доказот ги надминува рамките на средношколската математика, а погоре изложената постапка треба само да овозможи да го разбереш постоењето на единствен реален број a^x за $a > 0$ и x кој било реален број. И на крајот од ова разгледување да забележиме дека за степен со реален показател важи:

-За секој $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ и $x \in \mathbb{R}$ таков што $r \leq x \leq s$, каде r и s се рационални броеви, a^x е реален број за кој важи $a^r \leq a^x \leq a^s$.

-За $a = 1$ и $x \in \mathbb{R}$, важи $a^x = 1$.

-За секој $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ и $x \in \mathbb{R}$ таков што $r \leq x \leq s$, каде r и s се рационални броеви, a^x е реален број за кој важи $a^r \geq a^x \geq a^s$.

➤ **Пример 1.** Да ги споредиме по големина броевите: а) 3^4 и $3^{\sqrt{5}}$; б) $0.2^{\sqrt{2}}$ и $0.2^{0.1}$.

Решение. а) Да забележиме дека основата на степените е 3, при што $3 > 1$, а за показателите важи $\frac{1}{4} < \sqrt{5}$, каде $\sqrt{5} \approx 2.236$. Значи: $3^4 < 3^{\sqrt{5}}$.

б) Овде да забележиме дека основата на степените е 0.2, при што $0 < 0.2 < 1$, додека за показателите имаме: $0.1 < \sqrt{2}$. Значи: $0.2^{0.1} > 0.2^{\sqrt{2}}$. ■

2. Поим и основни својства на експоненцијална функција

Дефиниција. Функцијата $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, зададена со $f(x) = a^x$, каде $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ и $a \neq 1$ се нарекува експоненцијална функција.

Од дефиницијата, како и од својствата 1^0 - 10^0 , кои важат и за степен со показател реален број можеме да ги наведеме следните својства на експоненцијалната функција:

- 1⁰. Доменот D_f (дефиниционата област) за експоненцијалната функција $f(x) = a^x$ е множеството на реалните броеви, т.е. $D_f = \mathbb{R}$.
- 2⁰. Множеството V_f на вредности на експоненцијалната функција $f(x) = a^x$ е: $V_f = \mathbb{R}^+$.
- 3⁰. За $x = 0$, експоненцијалната функција $f(x) = a^x$ има вредност $f(0) = 1$.
- 4⁰. Експоненцијалната функција $f(x) = a^x$, за $a > 1$ монотонно расте, додека за $0 < a < 1$ монотонно опаѓа, на целиот домен D_f .

Доказ. Својствата 1⁰ и 2⁰ следуваат директно од дефиницијата. Од $a^0 = 1$, следува својството 3⁰.

Последното својство 4⁰ ќе го докажеме со докажување на импликациите:

а) $a > 1 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, т.е. $f(x_1) < f(x_2)$.

б) $0 < a < 1 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$, т.е. $f(x_1) > f(x_2)$.

а) Нека $a > 1$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 < x_2$, т.е. $x_2 = x_1 + h$, каде $h > 0$. Од $a^h > 1$ следува:

$$a^{x_2} = a^{x_1+h} = a^{x_1} \cdot a^h > a^{x_1}.$$

б) Обиди се сам, се докажува аналогно. ■

Како последица од својството 4^0 се изведуваат и својствата:

$$5^0. \text{ Ако } a > 1 \wedge a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2,$$

$$6^0. \text{ Ако } 0 < a < 1 \wedge a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2,$$

$$7^0. \text{ Ако } a > 0, a \neq 1 \text{ и } a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Доказ. Ќе ја докажеме само првата последица, бидејќи останатите две се докажуваат аналогно. Нека $a > 1$ и $a^{x_1} < a^{x_2}$. За x_1 и x_2 ги имаме следните можности: $x_1 > x_2$, $x_1 = x_2$ или $x_1 < x_2$. Првиот случај, $x_1 > x_2$ не евозможен бидејќи тогаш од својството 4^0 следува $a^{x_1} > a^{x_2}$, што противречи на условот. Вториот случај, $x_1 = x_2$, исто така не евозможен бидејќи тогаш би имале $a^{x_1} = a^{x_2}$. Значи останува само $x_1 < x_2$. ■

► **Пример 1.** Да ја одредиме дефиниционата област на функциите:

$$\text{а) } y = 3^{x+1}, \quad \text{б) } y = 2^{\frac{1}{x}}, \quad \text{в) } y = 4^{\frac{1}{x-3}}, \quad \text{г) } y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{x^2-4}}, \quad \text{д) } y = 5^{\sqrt{x}}, \quad \text{е) } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x-1}}$$

Решение. а) Дефиниционата област D е секое $x \in \mathbb{R}$, т.е. $D = \mathbb{R}$,

б) Дропката $\frac{1}{x}$ е дефинирана за сите вредности на x , за кои именителот е различен од нула, т.е. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, в) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, г) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,

д) Квадратниот корен е дефиниран за ненегативна поткоренова величина (зошто?), па дефиниционата област се сите вредности $x \in [0, \infty)$, т.е. $D = [0, \infty)$, е) $D = [1, \infty)$. ■

► **Пример 2.** Да ја определиме мононосноста на функциите:

$$\text{а) } y = 0,3^x, \quad \text{б) } y = (\sqrt{2})^x, \quad \text{в) } y = 4^{x+1}, \quad \text{г) } y = \left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad \text{д) } y = 5^{2x}, \quad \text{е) } y = \left(\frac{1}{0,2}\right)^x$$

Решение. Функциите под б), в), д) и е) монотонно растат, бидејќи основата на степенот е број поголем од 1; додека функциите под а) и г) монотонно опаѓаат, бидејќи основата на степените е број меѓу 0 и 1 (својство 4^0). ■

3. График на експоненцијална функција

Сега останува да го конструираме графикот на експоненцијалната функцијата $f(x) = a^x$ во однос на зададен правоаголникот координатен систем xOy . График на функцијата $f(x) = a^x$ е множеството на точки (x, a^x) , $x \in \mathbb{R}$, т.е. $\Gamma = \{(x, a^x), x \in \mathbb{R}\}$.

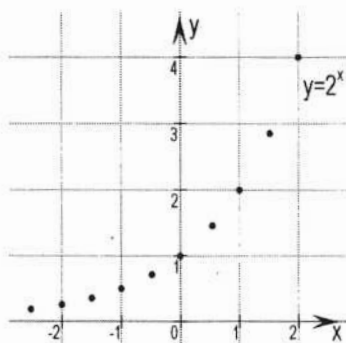
За графикот на експоненцијалната функцијата $f(x) = a^x$, според досега кажаното, имаме:

- графикот на функцијата $f(x) = a^x$ се наоѓа над x -оската,
 - графикот на функцијата $f(x) = a^x$ ја сече y -оската во точката $(0, 1)$, бидејќи $a^0 = 1$.
- за секое $a \in \mathbb{R}^+$ и $a \neq 1$.

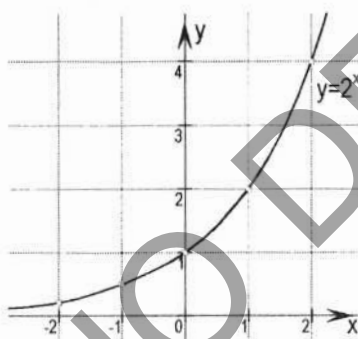
➤ **Пример 1.** Да го конструираме графикот на функциите: а) $f(x) = 2^x$, б) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Решение. а) Најнапред табеларно, а потоа и графички ќе ја претставиме функцијата $f(x) = 2^x$ (цртеж 1а и 1б), ќе пишуваме и $f(x) = y$. Вредностите на функцијата ги одредуваме на следниот начин: $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $f(0) = 2^0 = 1$, $f(1) = 2^1 = 2$ и т.н.

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$f(x) = 2^x$	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	...



црт. 1а

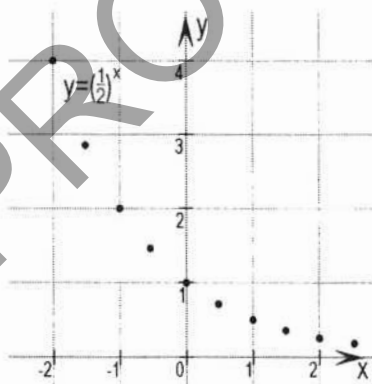


црт. 1б

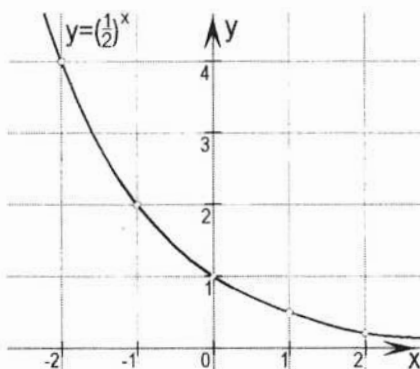
Од графикот на функцијата $f(x) = 2^x$ можеме да забележиме дека тој се приближува до негативниот дел на Ox оската, која никогаш не ја сече. Во овој случај оската Ox се нарекува **асимптота** на кривата, график на разгледуваната функција $f(x) = 2^x$.

б) На ист начин ќе ја разгледуваме и функцијата $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (цртеж 2а и 2б),

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	...	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...



црт. 2а

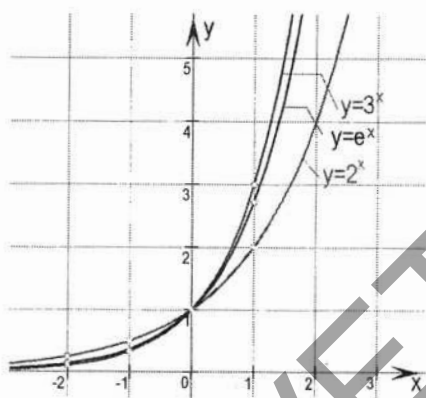


црт. 2б

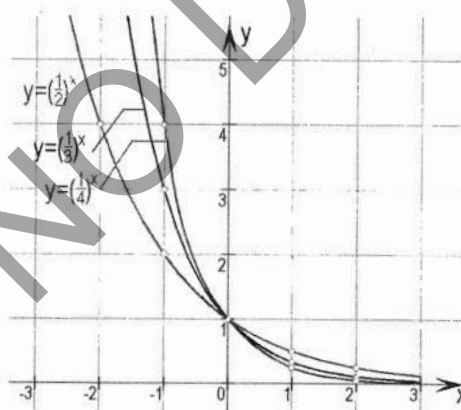
Од графикот на функцијата $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ можеме да забележиме дека тој се приближува до позитивниот дел на Ox оската, која никогаш не ја сече. Значи оската Ox се јавува и во овој случај како асимптотата на кривата, график на разгледуваната функција $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

► **Пример 2.** Во исти координатен систем да ги претставиме графициите на експоненцијалните функции: а) $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 3^x$, б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Решение. Графиците на функциите под а) се прикажани на цртеж 3, а тие под б) на цртеж 4. Табеларното претставување направи го сам и провери ја точноста (напомена $e = 2,7182\dots$)!



црт. 3



црт. 4

Набљудувајќи ги графициите на овие експоненцијални функции забележуваме дека графициите на соодветните функции се доближуваат до координатните оски и тоа:

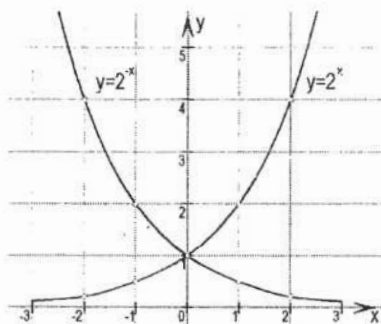
- (i) за $a > 1$, кога a се зголемува; (ii) за $0 < a < 1$, кога a се намалува.

Да забележиме уште едно својство на експоненцијалните функции разгледувајќи ги нивните графици на ист координатен систем.

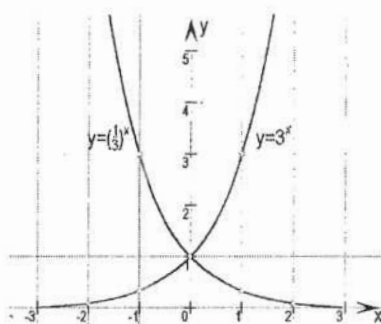
► **Пример 3.** Во исти координатен систем да ги нацртаме графициите на функциите:

- а) $y = 2^x$ и $y = 2^{-x}$, б) $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Решение. Графиците на функциите под а) се претставени на цртеж 5, а оние под б) на цртеж 6. Да те потсетиме дека $2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



црт. 5



црт. 6

Од досегашните примери може да се забележи дека графиците на функциите $y = a^x$ и $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, се симетрични во однос на y -оската. Навистина ако точката $A(x_0, y_0)$ што припаѓа на графикот на функцијата $y = a^x$, важи $y_0 = a^{x_0}$. Точката $A_1(-x_0, y_0)$, симетрична на точката A во однос на y -оската припаѓа на графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, бидејќи важи

$$a^{x_0} = a^{-(-x_0)} = \frac{1}{a^{-x_0}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0}$$

4. Графици на експоненцијалните функции $y = a^x \pm m$, $y = a^{x \pm p}$ и $y = a^{x \pm p} \pm m$

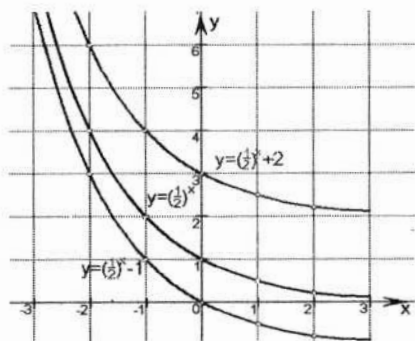
Во следните примери ќе ја согледаме положбата на графикот на функцијата според аналитичкиот запис..

► Пример 1. Во исти координатен систем да ги нацртаме графиците на функциите:

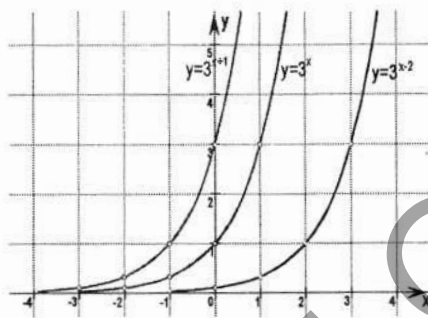
а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$; б) $y = 3^x$, $y = 3^{x+1}$, $y = 3^{x-2}$.

Решение. Најнапред да ги претставиме функциите табеларно со неколку точки, со чија помош ќе ги нацртаме нивните графици, за потоа да ја согледаме нивната положба:

а) x	-2	-1	0	1	2	б) x	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$y = 3^x$		$\frac{1}{3}$	1	3		
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$	6	4	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$	$y = 3^{x+1}$	$\frac{1}{3}$	1	3			
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$y = 3^{x-2}$				$\frac{1}{3}$	1	3



црт. 1



црт. 2

а) Графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, го добиваме од графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ со translација за две единици во позитивна насока на y -оската (значи нагоре), а графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ го добиваме од графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ со translација за една единица во негативна насока на y -оската, значи надолу. (црт. 1).

б) Графикот на функцијата $y = 3^{x+1}$ го добиваме од графикот на функцијата $y = 3^x$ со translација за една единица во негативна насока на x -оската (значи на лево), а графикот на функцијата $y = 3^{x-2}$ го добиваме од графикот на функцијата $y = 3^x$ со translација за две единици во позитивна насока на x -оската, значи на десно. (црт. 2). ■

И во општ случај:

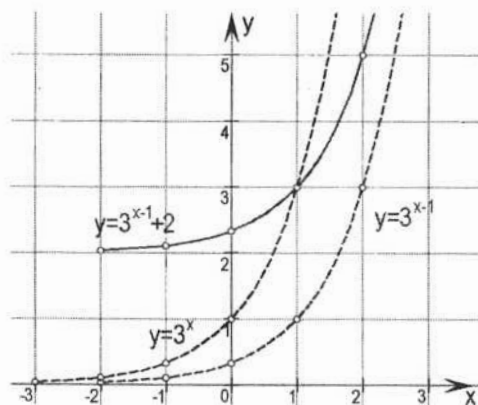
- Графикот на функцијата $f(x) = a^x + m$, го добиваме со translација на функцијата $y = a^x$ во правец на y -оската за $|m|$ единици нагоре ако $m > 0$, односно надолу ако $m < 0$.

- Графикот на функција $y = a^{x-p}$, го добиваме со translација на функцијата $y = a^x$ во правец на x -оската за $|p|$ единици на десно ако $p > 0$, односно на лево ако $p < 0$.

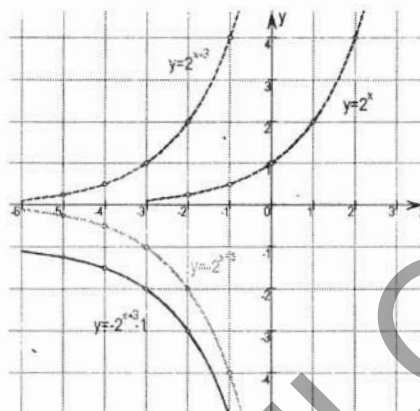
Да го примениме досега наученото. Врз основа на последните два примера лесно можеме да го нацртаме графикот на експоненцијалната функција $y = a^{x \pm p} \pm m$.

➤ **Пример 2.** Да го нацртаме графикот на функцијата $y = 3^{x-1} + 2$.

Решение. Графикот на функцијата $y = 3^{x-1} + 2$ го добиваме од графикот на функцијата $y = 3^x$ со translација за една единица во позитивна насока на x -оската (на десно) и потоа со translација за две единици во позитивна насока на y -оската (нагоре), (црт. 3).



црт. 3



црт. 4

► **Пример 3.** Да го нацртаме графикот на функцијата $y = -2^{x+3} - 1$.

Решение. Графикот на функцијата $y = -2^{x+3} - 1$ го добиваме од графикот на функцијата $y = 2^x$ со translacija за три единици во негативна насока на x -оската (на лево), при што го добиваме графикот на функцијата $y = 2^{x+3}$. Потоа симетрично во однос на x -оската го добиваме графикот на функцијата $y = -2^{x+3}$ и на крајот со translacija на овој график за една единица во негативна насока на y -оската (надолу) се добива бараниот график. (црт. 4).

ЗАДАЧИ

1. Одреди ја дефиниционата област за функциите:

а) $y = 4^{x-3}$, б) $y = 2^{\frac{1}{x}}$, в) $y = 5^{\frac{1}{x-3}}$, г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x^2-1}}$ д) $y = 2^{\sqrt{x+3}}$;

2. Определи ја монотоноста на функцијата $y = a^x$ ако: а) $a > 1$, б) $0 < a < 1$, в) $a = 1$ и скицирај ги нивните графици на одделни координатни системи.

3. Користејќи ги својствата на експоненцијалната функција, одреди кој број е поголем:

а) $5^{\sqrt{2}}$ или $5^{\sqrt{3}}$, б) $(1.5)^{\frac{3}{4}}$ или $(1.5)^{\frac{2}{3}}$, в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ или $(0.5)^{\sqrt{2}}$.

4. Во ист координатен систем нацртај ги графиките на функциите: $y = 3^x$ и $y = -3^x$. Изведи заклучок за положбата на истите.

Во ист координатен систем нацртај ги графиките на функциите:

5. $y = 4^x$, $y = 3^x$, $y = 2^x$, $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$, $y = 1$, $y = \left(\frac{4}{5}\right)^x$, $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

6. $y = -3^x$, $y = -3^x - 1$ и $y = -3^x + 2$.

7. $y = 2^x$, $y = 2^{x-1}$, $y = 2^{x-1} - 2$.

8. $y = 2^x$, $y = 2^{x-2}$, $y = 2^{x-2} + 1$.

9. Нацртај го графикот на функцијата: $y = -2^{x+1} + 2$.

1.1.2. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Дефиниција. Равенката во која непознатата се наоѓа во степеновиот показател на барем еден степен, со основа позитивен реален број, различен од 1, се нарекува **експоненцијална равенка**.

На пример равенките: $5^x = 1$; $2^{x-3} = 4$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$; $2^{\sqrt{x+3}} = 8+x$; $9^x + 2 \cdot 3^x = 15$; $2^x = 3$

се експоненцијални равенки.

Решенијата на експоненцијалните равенки ќе ги бараме во множеството на реалните броеви. Општ метод за нивно решавање не постои. Но некои видови експоненцијални равенки можеш да решиш со примена на правила и постапки што досега си ги изучувал во математиката. Овде ќе се задржиме само на таквиот вид на експоненцијални равенки.

1. Експоненцијална равенка која со идентични трансформации може да се доведе во видот:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad a > 0 \text{ и } a \neq 1. \quad (1)$$

Врз основа на монотоноста на експоненцијалната функција следува дека за $a > 0$ и $a \neq 1$, равенката (1) е еквивалентна на равенката:

$$f(x) = g(x).$$

Значи овде степените во експоненцијалните равенки ги доведуваме до еднакви основи.

► **Пример 1.** Да ги решиме равенките: а) $5^x = 25$; б) $2^{x-3} = 4$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$;

г) $3^{x^2-1} = 27$; д) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 56$; е) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$.

Решение.

а) $5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2$;

б) $2^{x-3} = 4 \Leftrightarrow 2^{x-3} = 2^2 \Leftrightarrow x-3 = 2 \Rightarrow x = 5$.

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Rightarrow x = -2$;

г) $3^{x^2-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-1} = 3^3 \Leftrightarrow x^2-1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$;

д) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 56 \Leftrightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 56 \Leftrightarrow 7 \cdot 2^x = 56 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$.

е) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^x + \frac{1}{3} \cdot 3^x + \frac{1}{9} \cdot 3^x = 5^x + \frac{1}{5} \cdot 5^x + \frac{1}{25} \cdot 5^x \Leftrightarrow$

$$\frac{31}{9} \cdot 3^x = \frac{31}{25} \cdot 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow x = 2.$$

2. Експоненцијална равенка од видот $F[a^{f(x)}] = 0$, каде $a > 0$ и $a \neq 1$, која со смената $a^{f(x)} = y$ се сведува на равенката $F[y] = 0$.

Ако решенијата на равенката $F[y]=0$ се y_i ($i=1,2,\dots$), тогаш решавањето на равенката $F[a^{f(x)}] = 0$ се сведува на решавање на вкупноста од равенките: $a^{f(x)} = y_i$ ($i=1,2,\dots$).

Во овој случај велиме дека експоненцијалната равенка ја решаваме со воведување на смена.

➤ **Пример 2.** Да ги решиме експоненцијалните равенки:

а) $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$; б) $4^x + 3 \cdot 2^x - 4 = 0$; в) $3^{2x+5} - 2 = 3^{x+2}$; г) $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$.

Решение.

а) Бидејќи $7^{2x} = (7^x)^2$ равенката $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$ со смената $y = 7^x$ се сведува на квадратна равенка по y , т.е. на равенката $y^2 - 8y + 7 = 0$, чиј решенија се $y_1 = 1$ и $y_2 = 7$. Сега од равенките $7^x = 1$ ($7^x = 7^0$) и $7^x = 7$ ($7^x = 7^1$) следува дека решенијата на дадената равенката се $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

б) Равенката $4^x + 3 \cdot 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ со смената $y = 2^x$ се сведува на равенката $y^2 + 3y - 4 = 0$ чиј решенија се $y_1 = -4$ и $y_2 = 1$. Одовде имаме: $2^x = -4$ и $2^x = 1$. Равенката $2^x = -4$ нема решение во множеството на реалните броеви, додека равенката $2^x = 1$ има решение $x = 0$, кое е и единственото решение на дадената равенка.

в) Равенката $3^{2x+5} - 2 = 3^{x+2}$ може да се трансформира во обликот $3^{2x+4+1} - 3^{x+2} - 2 = 0$ или $3 \cdot 3^{2x+4} - 3^{x+2} - 2 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2(x+2)} - 3^{x+2} - 2 = 0$, која со смената $y = 3^{x+2}$ се сведува на равенката $3y^2 - y - 2 = 0$, чиј решенија се $y_1 = 1$ и $y_2 = -\frac{2}{3}$. Од нив само првото е решение

кое ги задоволува барањата за решение на експоненцијална равенка (зошто!). Од $y_1 = 1$ имаме $3^{x+2} = 1$, од каде за решение на дадената равенка добиваме $x = -2$.

г) Равенката $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$ со смената $y = 3^{\sqrt{x}}$ се сведува на равенката $3y^2 - 4y + 3 = 0$ чиј решенија се $y_1 = 1$ и $y_2 = 3$. Од овде имаме $3^{\sqrt{x}} = 1$ и $3^{\sqrt{x}} = 3$. Значи $\sqrt{x} = 0$ и $\sqrt{x} = 1$, од каде за решение на дадената равенка добиваме $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Ако сакаме да ја решиме равенката од видот $4^x = 3$ ќе најдеме на проблем левата и десната страна да ги доведеме до иста основа. Овие равенки се решаваат со една нова операција т.н. логаритмирање, која ќе ја воведеме во натамошното изложување.

ЗАДАЧИ

Решете ги следните експоненцијални равенки:

1. а) $4^x = 1$ б) $\frac{1}{3^x} = 27$; в) $5^{-x} = 1$ 25;

2. а) $9^{x+1} = 27$, б) $\sqrt{3^x} = 9$; в) $6^{\sqrt{x-2}} = 36$;

3. а) $27^{x-1} = 9^{x+2}$, б) $2^{x+2} \cdot 3^{x+2} = 36 \cdot 6^{2x-1}$;

4. а) $(9^{x+1})^{x-2} = 1$, б) $5^{x^2-3x+1} = \frac{1}{5}$;

5. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} = 6$.

6. а) $3^x - 3^{x+1} + 3^{x+2} = 21$, б) $2^{2x} + 3 \cdot 4^x = 64$;

7. а) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 12 = 0$; б) $4 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 9 = 0$;

8. а) $9^x - 3^x - 6 = 0$; б) $3^{x+1} + 3^{2-x} = 12$;

*9. а) $2^x + 2^{x-1} = 3^x$, б) $5^x + 5^{x-1} = 6^x$;

*10. $27^{2\sqrt{x}} = 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} - 3$.

1.2. ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

Логаритамската функција е уште една функција со која ќе се запознаеш оваа учебна година. Таа наоѓа голема примена, како во математиката така и во другите природни науки. Но најнапред потребно е да се запознаеме со новиот поим, поимот за логаритам.

1.2.1. ПОИМ ЗА ЛОГАРИТАМ

При решавањето на експоненцијалните равенки забележавме дека не располагаме со правила или постапки за решавање на експоненцијална равенка од видот $a^x = b$, каде b не може да се претстави во вид на степен со основа a . Имено во равенството $a^x = b$, основата на степенот a ја наоѓаме со операцијата коренување, b со операцијата степенување, додека за определување на показателот x воведуваме нова операција *логаритмирање*. при тоа решението за x го означуваме со $\log_a b$. Показателот x се нарекува *логаријам*, основата a *основа на логаријамот*, а b *логаријаманд* или *нумерус*. Можеме да ја искажеме следната:

Дефиниција. Логаријам на позитивен реален број b , за основа a ($a > 0$, $a \neq 1$), е реалниот број x , со кој треба да се степенува основата a , за да се добие бројот b . Запишуваме:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad (1)$$

Равенствата на левата и десната страна од еквиваленцијата (1) изразуваат иста зависност меѓу броевите a , b и x , и се разликуваат само по формата на записот.

Ако во равенството $a^x = b$, x го замениме со $\log_a b$ ја добиваме релацијата:

$$a^{\log_a b} = b \quad (2)$$

Равенството (2) го нарекуваме *основен логаријамски идентитет* и тој важи за $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$.

Непосредно од дефиницијата за логаритам следува:

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \log_a 1 = 0, \text{ бидејќи } a^0 = 1. \\ 2^\circ \quad & \log_a a = 1, \text{ бидејќи } a^1 = a. \\ 3^\circ \quad & \log_a a^n = n, \text{ бидејќи } a^n = a^n. \end{aligned}$$

Да забележиме дека бројот 0 и негативните броеви немаат логаритам во множеството на реалните броеви, а логаритми од некои позитивни броеви при дадена основа можат да се определат од дефиницијата.

► **Пример 1.** Користејќи ја дефиницијата за логаријам да ја провериме точноста на следниите равенства: а) $\log_5 5 = 1$, б) $\log_3 27 = 2$, в) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$, г) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 2$, д) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$.

Решение. а) Точно е, бидејки: $5^1=5$. б) Не е точно, бидејки: $3^2 \neq 27$.

в) Имаме: $16^{\frac{1}{2}} = 4$, одовде $\sqrt{16} = 4$, значи точно е. г) Не е точно, бидејки $\sqrt{2}^2 = 2$.

д) Равенството е точно бидејки: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^2 = 3^2 = 9$.

Во следните примери, со примена на дефиницијата за логаритам, ќе покажеме како во равенството $\log_a b = x$ се одредува кој било од реалните броеви a , b и x , доколку се познати преостанатите два од нив.

➤ **Пример 2.** Да го определите логаритмандој на логаритмиите:

а) $\log_3 b = 2$, б) $\log_5 b = -2$, в) $\log_{0.1} b = -1$, г) $\log_{\sqrt{2}} b = 4$, д) $\log_{\frac{1}{2}} b = 5$.

Решение.

а) $\log_3 b = 2 \Rightarrow 3^2 = b \Rightarrow b = 9$, б) $\log_5 b = -2 \Rightarrow 5^{-2} = b \Rightarrow b = \frac{1}{25}$, в) $\log_{0.1} b = -1 \Rightarrow 0.1^{-1} = b \Rightarrow b = 10$,

г) $\log_{\sqrt{2}} b = 4 \Rightarrow (\sqrt{2})^4 = b \Rightarrow b = 4$, д) $\log_{\frac{1}{2}} b = 5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 = b \Rightarrow b = \frac{1}{32}$.

➤ **Пример 3.** Да ја определите основата на логаритмиите:

а) $\log_a 4 = 2$, б) $\log_a 125 = -3$, в) $\log_a \frac{1}{27} = 3$, г) $\log_a 0.04 = 2$, д) $\log_a \sqrt{3} = \frac{1}{4}$.

Решение.

а) $\log_a 4 = 2 \Rightarrow a^2 = 4$, од каде наоѓаме $a_1 = 2$, $a_2 = -2$. Од дефиницијата за логаритам имаме дека за основата a на логаритмот важи $a > 0$, затоа решение на задачата е само $a = 2$.

б) $\log_a 125 = -3 \Rightarrow a^{-3} = 125 \Leftrightarrow a^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \Rightarrow a = \frac{1}{5}$;

в) $\log_a \frac{1}{27} = 3 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow a^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$;

г) $\log_a 0.04 = 2 \Rightarrow a^2 = 0.04$. При тоа решение е само $a = 0.2$ (зашто?);

д) $\log_a \sqrt{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow a^{\frac{1}{4}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{4}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow a = 3^2 \Rightarrow a = 9$.

➤ **Пример 4.** Да ги определите логаритмиите:

а) $\log_2 8$, б) $\log_5 \frac{1}{25}$, в) $\log_3 \sqrt{3}$, г) $\log_{\sqrt{2}} 4$, д) $\log_{\frac{1}{a}} a^2$.

Решение.

а) Нека $\log_2 8 = x$. Од дефиницијата за логаритам $2^x = 8$, т.е. $2^x = 2^3$, од каде $x = 3$.

б) Нека $\log_5 \frac{1}{25} = x$, значи имаме $5^x = \frac{1}{25}$, односно $5^x = 5^{-2}$, од каде добиваме $x = -2$.

в) Ако ставиме $\log_3 \sqrt{3} = x$, според дефиницијата имаме $3^x = \sqrt{3}$, односно $3^x = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

г) Ако ставиме $\log_{\sqrt{2}} 4 = x$, имаме $(\sqrt{2})^x = 4 \Leftrightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 4 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2$. Односно $x = 4$.

д) Ставаме $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x$. Од дефиницијата: $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^2 \Leftrightarrow (a^{-1})^x = a^2 \Leftrightarrow a^{-x} = a^2 \Rightarrow -x = 2, x = -2$.

► **Пример 5.** Користејќи го основниот логаритамски идентитет да пресметаме:

а) $7^{\log_7 2}$, б) $2^{1+\log_2 3}$, в) $5^{2+\log_5 2}$, г) $3^{2-\log_3 5}$, д) $4^{2^{\frac{1}{\log_2 3}}}$.

Решение. а) $7^{\log_7 2} = 2$. б) $2^{1+\log_2 3} = 2^1 \cdot 2^{\log_2 3} = 2 \cdot 3 = 6$, в) $5^{2+\log_5 2} = 5^2 \cdot 5^{\log_5 2} = 25 \cdot 2 = 50$,

г) $3^{2-\log_3 5} = 3^2 \cdot 3^{-\log_3 5} = 9 \cdot \frac{1}{3^{\log_3 5}} = 9 \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$. д) $4^{2^{\frac{1}{\log_2 3}}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_2 3} = (\sqrt{4})^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3$.

ЗАДАЧИ

1. Следните равенства запиши ги во вид на логаритамски равенства:

а) $2^5 = 32$. б) $3^0 = 1$. в) $5^{-2} = \frac{1}{25}$. г) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$. д) $(\sqrt{3})^2 = 3$.

2. Следните равенства запиши ги во вид на експоненцијални равенства:

а) $\log_4 64 = 3$. б) $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$. в) $\log_{0.2} 25 = -2$. г) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$. д) $\log_1 4 = -2$.

3. Определи ги логаритмите: а) $\log_7 49$. б) $\log_5 125$. в) $\log_{\sqrt{2}} 16$. г) $\log_{0.3} \frac{100}{9}$.

4. Определи ја основата на логаритмите: а) $\log_a 64 = 2$. б) $\log_a 27 = -3$. в) $\log_a \sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

г) $\log_a 2,25 = 2$.

5. Определи го логаритмандот на логаритмите: а) $\log_2 b = 5$. б) $\log_{36} b = \frac{1}{2}$. в) $\log_{0.2} b = 3$.

г) $\log_{\sqrt{3}} b = 4$.

6. Одреди го x ако: а) $x = 5^{2+\log_5 4}$. б) $x = 6^{1-\log_6 5}$.

*7. Докажи дека: а) $\log_2 (\log_2 16) = 2$. б) $\log_3 (\log_2 8) = 1$.

*8. Пресметај: а) $\log_2 (\log_3 (\log_4 64))$. б) $\log_4 64 \cdot \log_4 16 \cdot \log_4 4 \cdot \log_3 1$.

БРИГС, ХЕНРИ (Briggs Henry) (1561-1630) – англиски математичар, професор на лондонски колеџ. На совет на шкотскиот математичар Џ. Непер се занимава со логаритмите. Го објавува делото *Логаритамска аритметика* во кое дава и табlici на логаритми со основа 10, познати како декадни или Бригсови логаритми.

1.2.2. ОСНОВНИ ПРАВИЛА НА ЛОГАРИТМИРАЊЕТО

Алгебарските изрази се логаритмираат врз основа на следните правила.

Теорема 1. Логариџам за основа a ($a > 0$, $a \neq 1$), од производ на два позитивни реални броја е еднаков на збирот од нивните логариџми за истиа основа, т.е.:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (1)$$

Доказ. Согласно со основниот логаритамски идентитет за броевите x и y имаме:

$$x = a^{\log_a x} \quad \text{и} \quad y = a^{\log_a y}. \quad (*)$$

Множејќи ги соодветните страни на равенствата (*), добиваме:

$$x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Тогаш, од равенствата $\log_a a^n = n$ и $\log_a a = 1$:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a a^{\log_a x + \log_a y} = \log_a x + \log_a y. \blacksquare$$

Теорема 2. Логариџам за основа a ($a > 0$, $a \neq 1$), од количник на два позитивни реални броја е еднаков на разликата од логариџмите на деленикот и делителот за истиа основа, т.е.:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (2)$$

Доказ. Делејќи ги соодветните страни на равенствата (*), добиваме:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$$

Тогаш: $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a a^{\log_a x - \log_a y} = \log_a x - \log_a y. \blacksquare$

Теорема 3. Логариџам за основа a ($a > 0$, $a \neq 1$), од степен на позитивен реален број x^n , ($n \in \mathbb{R}$) е еднаков на производот од показателот на степенот n и логариџмот за основа a на основата x на степенот, т.е.:

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad (3)$$

Доказ. Во основниот логаритамски идентитет $x = a^{\log_a x}$ двете страни ги степенуваме на n -ти степен, па имаме:

$$x^n = (a^{\log_a x})^n = a^{n \log_a x}$$

Тогаш: $\log_a (x^n) = \log_a a^{n \log_a x} = n \log_a x. \blacksquare$

Последица. Логариџам за основа a ($a > 0$, $a \neq 1$) од корен од позитивен реален број е еднаков на логариџмот за основа a од ѝйкореновиот број, поделен со кореновиот показател, т.е.:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$$

Во следните примери сите логаритми во еден израз имаат иста основа (најчесто за основа го земаме бројот 10) и неа нема да ја запишуваме посебно, освен ако не е нагласено која е основата.

► **Пример 1.** Да ги логаритмираме изразите:

а) $5x$, б) $\frac{4xyz}{3}$, в) $3(x+y)$, г) $2xy^2z^3$, д) $\frac{x^2\sqrt{y}}{z^3}$, е) $\frac{2x\sqrt[3]{y^2w}}{z^4}$.

Решение.

а) Од (1): $\log 5x = \log 5 + \log x$,

б) Од (2) и (1): $\log \frac{4xyz}{3} = \log 4 + \log x + \log y + \log z - \log 3$,

в) $\log 3(x+y) = \log 3 + \log(x+y)$,

г) Ползувајќи ги последователно (1) и (3) имаме:

$$\log 2xy^2z^3 = \log 2 + \log x + \log y^2 + \log z^3 = \log 2 + \log x + 2\log y + 3\log z$$

д) $\log \frac{x^2\sqrt{y}}{z^3} = \log x^2 + \log \sqrt{y} - \log z^3 = 2\log x + \frac{1}{2} \log y - 3\log z$,

е) $\log \frac{2x\sqrt[3]{y^2w}}{z^4} = \log 2 + \log x + \frac{2}{3} \log y + \frac{1}{3} \log w - 4 \log z$.

Логаритмите се користат во различни пресметувања во математиката и другите науки. Исто така со нивна примена значително се упростуваат многу математички формули. Со логаритмирање можеме со голема точност да пресметуваме вредности на бројни изрази, иако мора да забележиме дека денес, сосема успешно, тоа го правиме со постоечките калкулатори и без користење на логаритмите. Но, сепак ќе покажеме како се пресметува вредноста на бројни изрази со **логаритмирање**, при што ќе ги применуваме и правилата за логаритмирање, а ќе се запознаеме и со операцијата антилогаритмирање.

За наоѓање на логаритми од дадени броеви порано се користеле специјално изработени табели, но во поново време за таа цел, исто така ги користиме калкулаторите. На пример, да најдеме $\log 21,1149$. Го внесуваме бројот 21.1149, го притиснуваме копчето **log** (логаритам со основа 10) и на дисплејот се добива вредноста 1.324589029.

Ќе ја покажеме и постапката за наоѓање на бројот чиј логаритам е даден, имено нека е дадено дека: $\log x = 1,324589$. Постапката за наоѓање на бројот x се нарекува **антилогаритмирање**, и ги содржи следните чекори: најнапред на калкулатор го внесуваме бројот 1,324589, потоа го притиснуваме копчето **2ndF** или кај некои калкулатори **INV** потоа **log** и на дисплејот се добива вредноста $21.11489859 \approx 21.1149$, што забележуваш!

► **Пример 2.** Да пресметаме: а) $x = 5,43 \cdot 13,57^3$, б) $x = \frac{\sqrt[3]{91,32}}{23,7^2 \cdot 4,9}$.

Решение.

а) $x = 5,43 \cdot 13,57^3$

$$\log x = \log (5,43 \cdot 13,57^3)$$

$$\log x = \log 5,43 + \log 13,57^3$$

$$\log x = \log 5,43 + 3\log 13,57$$

$$\log x = 0,734799829 + 3 \cdot 1,132579848$$

$$\log x = 0,734799829 + 3,397739543$$

$$\log x = 4,132539372 \Rightarrow x = 13568,73535.$$

$$б) x = \frac{\sqrt[3]{91,32}}{23,7^2 \cdot 4,9},$$

$$\log x = \frac{1}{3} \log 91,32 - (2 \cdot \log 23,7 + \log 4,9)$$

$$\log x = \frac{1}{3} \cdot 1,960565903 - 2 \cdot 1,374748346 - 0,69019608$$

$$\log x = 0,653521967 - 2,749496692 - 0,69019608$$

$$\log x = 0,653521967 - 3,439692772$$

$$\log x = -2,786170805 \Rightarrow x = 0,001636172.$$

Како што веќе кажавме најчесто се користат логаритми со основа 10, т.н. **декадни логаритми**. Тие се запишуваат со $\log x$ наместо со $\log_{10} x$ или уште почесто со $\lg x$.

Сега да забележиме едно својство на логаритмите на позитивните реални броеви, кои секогаш можеме да ги запишеме во т.н. стандарден вид: $x = a \cdot 10^k$, $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$. За таа цел да побараме логаритми (со основа 10), на пример од броевите: 0,002; 0,02; 0,2; 2; 20; 200; 2000. (Да те потсетиме дека $\lg 10 = 1$, додека со калкулатор можеш да најдеш дека $\lg 2 = 0,30103$).

$$0,002 = 2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \lg 0,002 = \lg 2 \cdot 10^{-3} = \lg 2 + \lg 10^{-3} = \lg 2 - 3 \lg 10 = \lg 2 - 3 = -3 + \lg 2 = -3 + 0,30103;$$

$$0,02 = 2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \lg 0,02 = -2 + \lg 2 = -2 + 0,30103;$$

$$0,2 = 2 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \lg 0,2 = -1 + \lg 2 = -1 + 0,30103;$$

$$2 = 2 \cdot 10^0 \Rightarrow \lg 2 = 0,30103 = 0 + 0,30103;$$

$$20 = 2 \cdot 10^1 \Rightarrow \lg 20 = 1 + \lg 2 = 1 + 0,30103;$$

$$200 = 2 \cdot 10^2 \Rightarrow \lg 200 = 2 + \lg 2 = 2 + 0,30103;$$

$$2000 = 2 \cdot 10^3 \Rightarrow \lg 2000 = 3 + \lg 2 = 3 + 0,30103;$$

Од прикажаното можеш да забележиш дека логаритмите на произволно избраните броеви имаат еден ист собиор 0,30103, а се разликуваат само по вредноста на првиот собиор, кој е цел број.

Слично за кој било позитивен реален број x имаме:

$$\lg x = k + \lg a,$$

при тоа целиот број k се нарекува **карактеристика**, а $\lg a$, се нарекува **мантиса** на логаритмот на бројот x и се означува со m . Бидејќи $1 \leq a < 10$ имаме дека $\lg a$ е број не помал од 0 и помал од 1, провери! Значи можеме кратко да запишеме:

$$\lg x = k + m, \text{ каде } x \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{Z}, m \in [0,1).$$

За наоѓање на карактеристика на кој било позитивен реален број важи:

1) карактеристиката на декаден логаритам на бројот x , $0 < x < 1$, е негативен број чија апсолутна вредност е еднаква на бројот на нулите пред првата цифра на x што не е нула.

2) карактеристиката на декаден логаритам на бројот x , $x > 1$, е за еден помала од бројот на цифрите на неговниот цел дел.

Пресметувањето на мантиката на логаритмите на броеви е сложена постапка, затоа порано се користеле т.н. логаритамски таблици (тие сеуште се во употреба). Ние логаритмите на броевите ги наоѓаме со користење на калкулатор, што секако е многу поедноставно.

ЗАДАЧИ

1. Најди (со калкулатор): а) $\lg 234.56$; б) $\lg 78.9$; в) $\lg 3.987$; г) $\lg 0.25$; д) $\lg 0.01357$.

2. Најди го x ако: а) $\lg x = 0.106099$; б) $\lg x = 1.486$; в) $\lg x = 3.301680949$; г) $\lg x = -2.468521$.

3. Пресметај го x ако: а) $x = \frac{3}{4} \lg 53$; б) $x = \frac{1}{2} \lg \frac{1}{2}$; в) $x = \frac{2}{7} \lg 0.7 + \frac{3}{5} \lg 555$.

4. Логаритмирај ги изразите: а) $5ac$; б) $\frac{2adp}{3bc}$; в) ab^2c^3 ; г) $c \cdot \sqrt[3]{a^5b^4}$; д) $\frac{2ab^3}{\sqrt[5]{c^2}}$.

5. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $x = 235 \cdot \sqrt[3]{178}$; б) $x = \sqrt{5\sqrt{4\sqrt{3\sqrt{2}}}}$; в) $x = \frac{27.6 \cdot \sqrt[3]{1949}}{9.05}$.

НЕПЕР, ЏОН (Napier John) (1550-1617) - шкотски математичар. По здобивањето со солидно образование на еден од најдобрите универзитети во Шкотска, Универзитетот Св. Андреја се занимава со теологија, но и со математика. Начаен е неговиот придонес во откривањето на логаритмите на кои им посветува дваесетина години непрекината работа. Во 1614. го објавува делото *Конструкција на законот за логаритми*, каде логаритмите на броевите ги дефинира на сличен начин на денешното дефинирање. Заедно со англискиот математичар Х. Бригс составува логаритамски таблици кои и денес се во употреба. Во 1617. го објавува делото *Сметаче со логаритамски стапчиња*, во кое дава полуавтоматска постапка за множење на броеви.

1.2.3. ВРСКИ МЕЃУ ЛОГАРИТМИ СО РАЗЛИЧНИ ОСНОВИ

Ќе покажеме дека е доволно да ги знаеме логаритмите со една основа (најчесто 10) за да можеме да преминеме на логаритми со друга основа. Преминувањето од логаритам со една основа кон логаритам со друга основа е дадено со следнава *врска меѓу логаритмиите со различни основи*:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a, c \neq 1.$$

Доказ. Основниот логаритамски идентитет $a^{\log_a b} = b$ го логаритмираме со основа c и притоа добиваме:

$$\log_c (a^{\log_a b}) = \log_c b \Leftrightarrow \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b \Leftrightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Директна *последица* од основната врска меѓу логаритми со различни основи е следнава:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+, \quad a, b \neq 1.$$

Доказ. Во основната врска меѓу логаритми со различни основи ќе го избереме b за нова основа на логаритмите:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Врските меѓу логаритми со различни основи ќе ги искористиме во решавањето на примерите што следат.

➤ **Пример 1.** На наједноставен начин да пресметаме: а) $\log_{81} 3$, б) $\log_{32} \sqrt[3]{2}$.

Решение. а) $\log_{81} 3 = \frac{1}{\log_3 81} = \frac{1}{4}$, б) $\log_{32} \sqrt[3]{2} = \frac{\log_2 \sqrt[3]{2}}{\log_2 32} = \frac{\frac{1}{3} \log_2 2}{\log_2 2^5} = \frac{\frac{1}{3} \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{1}{15}.$

➤ **Пример 2.** Да пресметаме:

а) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 11 \cdot \log_{11} 13 \cdot \log_{13} 15$, б) $\log_3 2 \cdot \log_2 9$, в) $\log_7 8 \cdot \log_4 49$.

Решение.

а) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 11 \cdot \log_{11} 13 \cdot \log_{13} 15 = \frac{\lg 5}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 7}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 11}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 13}{\lg 11} \cdot \frac{\lg 15}{\lg 13} = \frac{\lg 3 \cdot 5}{\lg 3} = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg 3} = 1 + \frac{\lg 5}{\lg 3} = 1 + \log_3 5,$

б) $\log_3 2 \cdot \log_2 9 = \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 9}{\lg 2} = \frac{\lg 3^2}{\lg 3} = \frac{2 \lg 3}{\lg 3} = 2$, в) $\log_7 8 \cdot \log_4 49 = \frac{\lg 8}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 49}{\lg 4} = \frac{\lg 2^3}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 7^2}{\lg 2^2} = \frac{3 \cdot \lg 2}{\lg 7} \cdot \frac{2 \cdot \lg 7}{2 \cdot \lg 2} = 3.$

Од основната врска меѓу логаритми со различни основи следуваат и следниве врски:

а) $\log_a b = \frac{1}{k} \log_a b$ б) $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$ в) $\log_a b^k = k \log_a b$

Доказ.

$$\text{а) } \log_a b = \frac{\lg b}{\lg a^k} = \frac{\lg b}{k \lg a} = \frac{1}{k} \log_a b, \quad \text{б) } \log_{\frac{1}{a}} b = \frac{\lg b}{\lg \frac{1}{a}} = \frac{\lg b}{\lg a^{-1}} = \frac{\lg b}{(-1) \cdot \lg a} = -\frac{\lg b}{\lg a} = -\log_a b,$$

$$\text{в) } \log_a b^k = \frac{\lg b^k}{\lg a^k} = \frac{k \lg b}{k \lg a} = \frac{\lg b}{\lg a} = \log_a b.$$

► **Пример 3.** Користејќи ги врските меѓу логаритми со различни основи, да пресметаме: а) $\log_{\sqrt{a}} 3$, ако $\log_a 3 = b$, б) $\log_2 \sqrt[3]{a}$, ако $\log_a 8 = b$,

в) $\log_{\sqrt[3]{3}} 4$, ако $\log_{\frac{1}{2}} 3 = a$, г) $\log_{30} 8$, ако $\lg 5 = a$ и $\lg 3 = b$.

Решение.

$$\text{а) } \log_{\sqrt{a}} 3 = \log_{a^{\frac{1}{2}}} 3 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_a 3 = 2 \log_a 3 = 2b,$$

$$\text{б) } \log_2 \sqrt[3]{a} = \log_2 a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_2 a = \log_2 a^{\frac{1}{3}} = \log_8 a = \frac{1}{\log_a 8} = \frac{1}{b},$$

$$\text{в) } \log_{\sqrt[3]{3}} 4 = \frac{\log_{\frac{1}{2}} 4}{\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{3}} = \frac{-\log_2 2^2}{\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 3} = \frac{-2}{\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 3} = -\frac{4}{a},$$

$$\text{г) } \log_{30} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 30} = \frac{\lg 2^3}{\lg 10 \cdot 3} = \frac{3 \lg 2}{\lg 10 + \lg 3} = \frac{3 \lg \frac{10}{5}}{1 + b} = \frac{3(\lg 10 - \lg 5)}{1 + b} = \frac{3(1 - a)}{1 + b}.$$

Во врска со логаритмите со различни основи можеме да го кажеме и следново:

*Множеството од логаритми на сите позитивни реални броеви со иста основа a ($a > 0$, $a \neq 1$) се вика **логаритамски систем со основа a** .*

Во практиката најчесто во употреба се логаритамските системи со основа 10 и со основа e , каде бројот $e = 2.71828182845\dots$

Логаритамскиот систем кој го сочинуваат логаритмите со основа 10 се нарекува **декаден** или **Бриџсов**, според англискиот математичар Briggs (1561-1630) кој составил таблица за нивно пресметување. Тие се запишуваат со $\log x$ наместо со $\log_{10} x$, или уште почесто со $\lg x$.

Логаритамскиот систем кој го сочинуваат логаритмите со основа e се нарекува **природен** или **Нејеров**, според шкотскиот математичар J. Napier (1550-1617) кој, исто така составил таблица за нивно пресметување. Наместо со $\log_e x$ тие се запишуваат со $\ln x$.

ЗАДАЧИ

1. Без користење калкулатор, пресметај:

а) $\log_2 3 \cdot \log_3 8$, б) $\log_2 5 \cdot \log_5 3 \cdot \log_4 9 \cdot \log_9 2 \cdot \log_3 2$, в) $\log_2 \sqrt{3} \cdot \log_9 \sqrt[3]{2}$, г) $\frac{\log_3 5}{\log_{27} 5}$.

2. Без користење калкулатор, пресметај: а) $\frac{\lg 25}{\lg 125}$, б) $\frac{2 \log_2 6 - \log_2 3}{\log_2 144}$, в) $\frac{\log_3 64}{\log_3 48 - \log_3 6}$

3. Изрази го: а) $\log_{25} 64$ преку $\log_5 2$, б) $\log_8 \sqrt{27}$ преку $\log_2 3$.

4. Колку е: а) $\log_{\sqrt{8}} a$, ако $\log_2 a = b$, б) $\log_{49} a \sqrt[3]{a}$, ако $\log_7 a = b$.

5. Докажи дека вредноста на дробките: а) $\frac{\log_x 7}{\log_x 17}$, б) $\frac{\log_5 x}{\log_4 x}$; не зависи од x ($x > 0, x \neq 1$).

6. Докажи дека: $\log_5 7 \cdot \log_6 5 \cdot \log_3 6 + 1 = \log_3 21$.

7. Докажи дека: $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} = \log_x abc$, ($a > 0, b > 0, c > 0, x > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1, x \neq 1$).

8. Докажи дека: $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} = 3 \log_x a$, ($a > 0, x > 0, a \neq 1, x \neq 1$).

1.2.4. ТЕК И ГРАФИК НА ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

1. Да се потсетиме. При дефинирањето на логаритам кажавме дека $\log_a x$, каде $a > 0$ и $a \neq 1$, има смисла за секој позитивен реален број x , а вредноста на $\log_a x = b$, можеше да биде кој и да било реален број, бидејќи показателот b на степенот $a^b = x$, е кој и да било реален број. Сега можеме да ја дадеме следната:

Дефиниција. Функцијата $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, зададена со $f(x) = \log_a x$, каде $a > 0$ и $a \neq 1$ е реален број и x е независна реална променлива се нарекува **логаритамска функција**.

Врз основа на дефиницијата за логаритамската функција $f(x) = y = \log_a x$ и својствата на експоненцијалната функција, како и врската што важи од дефиницијата за логаритам $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, можеме да ги изведеме следните својства за логаритамската функција и да ја одредиме нивната смисла во однос на графикот на истата.

- 1⁰. Доменот D_f (дефиниционата област) за логаритамската функција $f(x) = \log_a x$ е множеството на позитивните реални броеви, т.е. $D_f = \mathbb{R}^+$.
- 2⁰. Множеството V_f на вредности на логаритамската функција $f(x) = \log_a x$ е секој реален број, т.е. $V_f = \mathbb{R}$.
- 3⁰. За $x = 1$, логаритамската функција $f(x) = \log_a x$, има вредност $f(1) = 0$.
- 4⁰. Логаритамската функција $f(x) = \log_a x$, за $a > 1$ *моноџоно расѝе*, додека за $0 < a < 1$ *моноџоно опаѓа*, на целиот домен D_f .

Доказ.

Својствата 1⁰ и 2⁰ следат директно од дефиницијата на логаритамската функција. Од $\log_a 1 = 0$ следува својството 3⁰. Додека својството 4⁰ ќе го докажеме со докажување на импликациите:

- а) $a > 1 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$, т.е. $f(x_1) < f(x_2)$,
 б) $0 < a < 1 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$, т.е. $f(x_1) > f(x_2)$.

а) Нека $a > 1$ и $x_1 < x_2$ и да означиме $\log_a x_1 = y_1$ и $\log_a x_2 = y_2$. Тогаш: $\log_a x_1 = y_1 \Leftrightarrow a^{y_1} = x_1$ и $\log_a x_2 = y_2 \Leftrightarrow a^{y_2} = x_2$. Од условот $x_1 < x_2$, добиваме $a^{y_1} < a^{y_2}$. Одовде и од својствата на експоненцијалната функција следува дека $y_1 < y_2$, значи $\log_a x_1 < \log_a x_2$, односно $f(x_1) < f(x_2)$. ■
 б) Обиди се сам, се докажува аналогно.

Како последица од својството 4⁰ се изведуваат и следниве својства:

- 5⁰. Ако $a > 1$ и $\log_a x_1 < \log_a x_2$, тогаш $x_1 < x_2$.
 6⁰. Ако $0 < a < 1$ и $\log_a x_1 < \log_a x_2$, тогаш $x_1 > x_2$.
 7⁰. Ако $\log_a x_1 = \log_a x_2$, тогаш $x_1 = x_2$.

Доказ. Ќе ја докажеме само првата последица, бидејќи другите се докажуваат аналогно. Нека $a > 1$ и $\log_a x_1 < \log_a x_2$. За x_1 и x_2 ги имаме следните можности: $x_1 > x_2$, $x_1 = x_2$ или $x_1 < x_2$. Првиот случај, $x_1 > x_2$, не е можен, бидејќи тогаш од својството 4⁰ следува $\log_a x_1 > \log_a x_2$, што противречи на условот. Вториот случај, $x_1 = x_2$, исто така не евозможен бидејќи тогаш би имале $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Значи, останува само $x_1 < x_2$. ■

➤ **Пример 1.** Да ја одредиме дефиниционата област на функциите:

- а) $\log_2(x-3)$, б) $\log_3(4-x)$, в) $\log_3(-x)$, г) $\log_7(x^2+4)$, д) $\log_2(1-x^2)$, е) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x+1}$.

Решение. Од својството 1⁰ следува дека дефиниционата област на функциите е:

- а) $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$, значи $D = (3, \infty)$, б) $4-x > 0 \Rightarrow -x > -4 \Rightarrow x < 4$, значи $D = (-\infty, 4)$,
 в) $-x > 0 \Rightarrow x < 0$, значи $D = (-\infty, 0)$, г) $x^2+4 > 0$, за секое $x \in \mathbb{R}$, значи $D = (-\infty, \infty)$,
 д) $1-x^2 > 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Rightarrow D = (-1, 1)$, (зошто?), е) $\frac{x-2}{x+1} > 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

➤ **Пример 2.** Да ја определите монотоноста на функциите:

а) $y = \lg x$, б) $y = \log_{0.2} x$, в) $y = \log_5 (2 + x)$, г) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, д) $y = \log_{0.3} (x - 4)$, е) $y = \log_7 (1 + x^2)$.

Решение. Функциите под а), в) и е) монотонно растат, бидејќи основата на логаритмите е број поголем од 1; додека функциите под б), г) и д) монотонно опаѓаат, бидејќи основата на логаритмите е број меѓу 0 и 1 (својство 4^0).

2. График на логаритамска функција

Сега останува да го конструираме графикот на логаритамската функција $f(x) = \log_a x$ во однос на зададен правоаголен координатен систем xOy . График на функцијата $f(x) = \log_a x$ е множеството на точки $(x, \log_a x)$, $x \in \mathbf{R}^+$, т.е. $\Gamma = \{(x, \log_a x), x \in \mathbf{R}^+\}$.

За графикот на логаритамската функција $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ според досега кажаното, имаме:

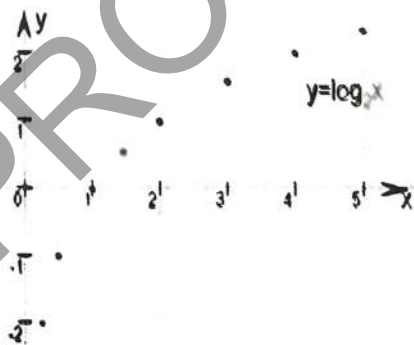
- од својството 1^0 следува дека тој се наоѓа десно од ординатната оска y .
- од својството 2^0 следува дека тој се наоѓа и под и над апсцисната оска x .
- од својството 3^0 следува дека тој ја сече x оската во точката $(1, 0)$.

➤ **Пример 3.** Да го конструираме графикот на функцијата: $f(x) = \log_2 x$.

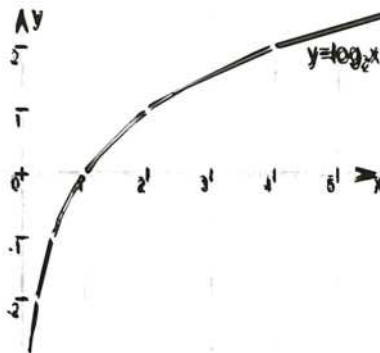
Решение. За да го нацртаме графикот најнапред ќе составиме табела со погодни избрани вредности на независно променливата x и соодветните вредности за функцијата $\log_2 x$. На пример за $x = 4$ имаме, $f(4) = \log_2 4 = 2$; за $x = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$; за $x = 3$, $f(3)$

ќе го најдеш со калкулатор, $f(3) = \log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx \frac{0.477}{0.301} \approx 1.585$, $f(\frac{3}{2}) = \log_2 \frac{3}{2} = \log_2 3 - \log_2 2 = 1.585 - 1 = 0.585$ и т.н. (За $f(5)$ провери сам-а!) Графикот на функцијата $f(x) = \log_2 x$ е претставен на цртежите 1а и 1б.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	0.585	1	1.585	2



црт. 1а



црт. 1б

➤ **Пример 4.** Да го конструираме графички на функцијата: $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Решение. Слично како во примерот 1., за $x = 3$, $f(3) = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$. Ако треба да

најдеш $f(2)$, $f(5)$ тоа треба да го направиш со калкулатор, а истовремено ќе си го провериш своето знаење од правилата за логаритмирање, имено:

$$\text{за } x=2, f(2) = \log_{\frac{1}{3}} 2 = \frac{\lg 2}{\lg \frac{1}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 1 - \lg 3} = \frac{0.301}{0 - 0.477} = -0.631,$$

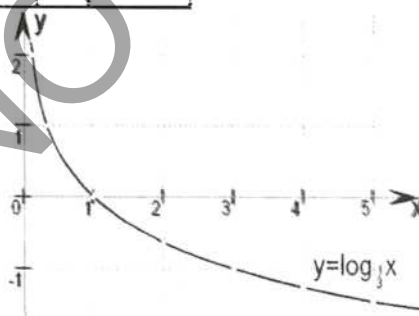
$$\text{за } x=5, f(5) = \log_{\frac{1}{3}} 5 = \frac{\lg 5}{\lg \frac{1}{3}} = \frac{\lg 5}{\lg 3^{-1}} = \frac{\lg 5}{-\lg 3} \approx -\frac{0.699}{0.477} \approx -1.465, \text{ и т.н.}$$

За $f(4)$ провери сам! Графикот на функцијата $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ е претставен на цртежите 2а и 2б.

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	2	3	5
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	2	1	0	-0.631	-1	-1.465



црт. 2а



црт. 2б

Од графичите на функциите $f(x) = \log_2 x$ и $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ можеме да забележиме дека

првиот се приближува до негативниот дел, а вториот до позитивниот дел на Оу оската, која никогаш не ја сечат. Следува, оската Оу е асимптота на кривите, графичите на разгледуваните функции $f(x) = \log_2 x$ и $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

➤ **Пример 5.** На истиот координатен систем да ги нацртаме графичките на функциите:

а) $y = \log_3 x$ и $y = -\log_3 x$;

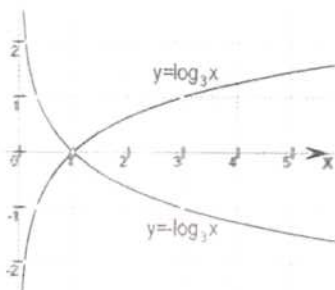
б) $y = \log_2 x$ и $y = \log_2(-x)$.

Решение. Најнапред да забележиме дека од врските меѓу логаритми со различни основи важи: $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$. Значи со цртање на го графикот на функцијата $y = -\log_3 x$, ние

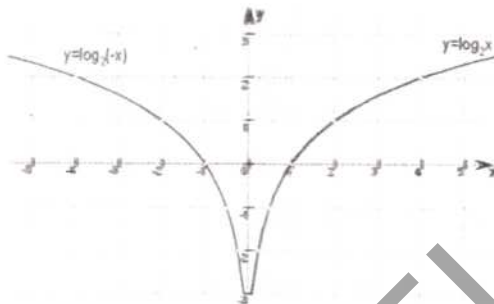
всушност го цртаме графикот на функцијата $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Графичите на функциите под а) и б) се претставени на црт. 3 и црт.4 соодветно, (табелите со вредности состави ги сам-а!). Притоа, може да се забележи симетрија на

графиците на функциите $y = \log_3 x$ и $y = -\log_3 x$ во однос на x -оската, а во вториот случај под б) симетрија на графиците на функциите $y = \log_2 x$ и $y = \log_2(-x)$ во однос на y -оската.



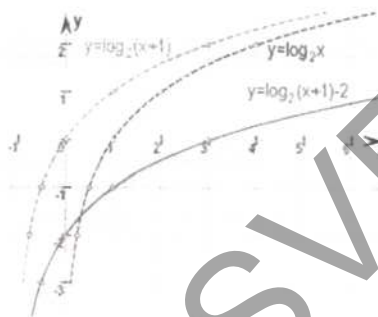
црт. 3



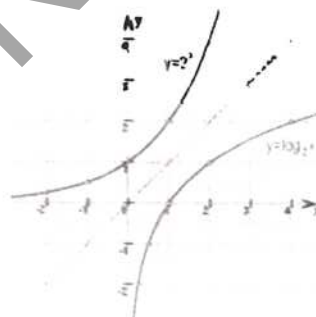
црт. 4

➤ **Пример 6.** Да ги нацртаме графикот на функцијата: $y = \log_2(x+1) - 2$.

Решение. Слично како кај експоненцијалните функции, најнапред го цртаме графикот на функцијата $y = \log_2 x$. Потоа графикот на функцијата $y = \log_2(x+1)$, кој е добиен од графикот на функцијата $y = \log_2 x$, со translација за една единица во негативна насока на x -оската (значи налево). Бараниот график на функцијата $y = \log_2(x+1) - 2$ е добиен од графикот на функцијата $y = \log_2(x+1)$ со translација за две единици во негативна насока на y -оската (значи надолу). Сите споменати графици се претставени на цртеж 5.



црт. 5



црт. 6

Од дефиницијата за логаритам ја согледаваме врската меѓу него и степен кај кој непознатата е во показателот. Сега да забележиме што се случува со графиците на логаритамската функцијата $y = \log_a x$ и експоненцијалната функција $y = a^x$.

➤ **Пример 7.** На истиот координатен систем да ги нацртаме графикот на функциите:

$$y = \log_2 x \quad \text{и} \quad y = 2^x.$$

Решение. Графиките на функциите лесно ќе ги нацртаме. Овде тие се претставени на црт. 6 и може да се забележи дека се симетрични во однос на правата $y = x$ (симетрала на првиот и третиот квадрант). Ова својство го имаат т.н. заемно инверзни функции со кои ќе се запознаеш во твоето понатамошно изучување на математиката, значи има уште многу нови сознанија со кои треба да се здобиеш.

ЗАДАЧИ

- Одреди ја дефиниционата област на функциите: а) $y = \log_2(x-1)$, б) $y = \log_{0.5}(2-x)$, в) $y = \log_7(x^2+3)$, г) $\log_3 \frac{x+1}{x-2}$.
- Опреди ја монотоноста на функциите: а) $y = \log_3 x$, б) $y = -\log_3 x$, в) $y = \log_{0.5}(x+1)$, г) $y = \ln x$.
- Користејќи ги својствата на логаритамската функција, одреди кој број е поголем:
а) $\ln 3$ или $\ln 5$, б) $\log_3 1$ или $\log_3 3$, в) $\log_5 \pi$ или $\log_5 \sqrt{5}$, г) $\log_{0.5} \frac{1}{5}$ или $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$.
- Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите: $y = \log_2 x$, $y = \ln x$ и $y = \log_3 x$.
Што забележуваш?
- Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите: $y = \log_{10} x$ и $y = \log_{0.1} x$.
Што забележуваш?
- Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите: $y = \log_3 x$ и $y = \log_3(-x)$.
Што забележуваш?
- Со помош на графикот на функцијата $y = \log_2 x$, на ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите: $y = \log_2 x - 1$ и $y = \log_2 x + 3$.
Нацртај ги графиците на функциите:
*8. $y = 1 - \log_2 x$, *9. $y = -\log_{\frac{1}{3}} x + 2$, *10. $y = \log_2(-x-1) + 1$.
- Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.
Што забележуваш?

1.2.5. ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ

Дефиниција. Равенката во која непознатата се наоѓа во логаритамска или во логаритамска основа на барем еден логаритам се вика **логаритамска равенка**.

На пример равенките: $\log_5 x = 2$, $\log_x 25 = 2$, $\lg(x+2) = 3$, $\log_3 + \log_3 x = 2$, $\lg(x+2) + \lg(x-1) = \lg 4$.

Логаритамските равенки, исто како и експоненцијалните, ќе ги разгледуваме само во множеството на реалните броеви. Општ метод за нивно решавање не постои, меѓутоа некои видови логаритамски равенки можеме да ги решиме со елементарни методи, користејќи ги дефиницијата за логаритам, правилата за логаритмирање и својствата на логаритамската функција.

1. Логаритамската равенка од видот: $\log_a x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, каде што $a, b \in \mathbb{R}$, има единствено решение $x = a^b$. Слично се решаваат и логаритамските равенки од видот: $\log_a f(x) = b$ и $\log_{f(x)} c = b$.

► **Пример 1.** Да ги решиме равенките:

а) $\log_5 x = 2$, б) $\lg(x+2) = 3$, в) $\log_2(x^2-1) = 3$, г) $\log_x 25 = 2$.

Решение.

а) $\log_5 x = 2 \Leftrightarrow x = 5^2 \Rightarrow x = 25$,

$$\text{б)} \lg(x+2) = 3 \Leftrightarrow x+2 = 10^3 \Rightarrow x = 998.$$

$$\text{в)} \log_2(x^2-1) = 3 \Leftrightarrow x^2-1 = 2^3 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3.$$

г) $\log_x 25 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x_1 = -5, x_2 = 5$, од кои само решението $x_2 = 5$ ги задоволува условите, основата на логаритмот да е поголема од 0 и различна од 1.

2. Логаритамска равенка која со помош на некои идентични трансформации може да се доведе во видот: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, е еквивалентна на равенката $f(x) = g(x)$, при што $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

► **Пример 2.** Да ги решиме равенките:

$$\text{а)} \lg 2 + \lg x = 1, \text{ б)} \log_2 x + \log_2(x+1) = 1, \text{ в)} \lg(x-3) - \lg(x-7) = \lg 5.$$

Решение.

$$\text{а)} \lg 2 + \lg x = 1 \Leftrightarrow \lg 2 \cdot x = \lg 10 \Leftrightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5.$$

$$\text{б)} \log_2 x + \log_2(x+1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot (x+1) = \log_2 2 \Leftrightarrow x \cdot (x+1) = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 1, \text{ од кои само } x_2 = 1 \text{ е решение, (зошто!).}$$

$$\text{в)} \lg(x-3) - \lg(x-7) = \lg 5 \Leftrightarrow \lg \frac{x-3}{x-7} = \lg 5 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-7} = 5 \Leftrightarrow x-3 = 5x-35 \Rightarrow x = 8. \text{ Ова е решение на дадената равенка бидејќи ги задоволува ограничувањата за } x \text{ (одговори кои?).}$$

3. Логаритамската равенка од видот $F[\log_a f(x)] = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, со смената $\log_a f(x) = y$ се сведува на равенката $F[y] = 0$. Ако решенијата на оваа равенка се y_i ($i = 1, 2, \dots$), тогаш решавањето на равенката $F[\log_a f(x)] = 0$ се сведува на решавање на вкупноста од равенките: $\log_a f(x) = y_i$ ($i = 1, 2, \dots$).

► **Пример 3.** Да ги решиме равенките:

$$\text{а)} \lg^2 x - 7 \lg x + 10 = 0, \text{ б)} 5 \lg x + \frac{2}{\lg x} = 7, \text{ в)} \frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1.$$

Решение.

$$\text{а)} \text{ Равенката } \lg^2 x - 7 \lg x + 10 = 0, \text{ со смената } \lg x = y \text{ се сведува на квадратната равенка: } y^2 - 7y + 10 = 0. \text{ Чии решенија се } y_1 = 5, y_2 = 2. \text{ Тогаш од } \lg x = 5 \text{ добиваме } x_1 = 10^5, \text{ а од } \lg x = 2 \text{ добиваме } x_2 = 100.$$

$$\text{б)} \text{ Равенката } 5 \lg x + \frac{2}{\lg x} = 7, \text{ со смената } \lg x = y \text{ се сведува на квадратната равенка: } 5y + \frac{2}{y} = 7 \Leftrightarrow 5y^2 - 7y + 2 = 0, \text{ чии решенија се } y_1 = 1, y_2 = \frac{2}{5}. \text{ Тогаш од } \lg x = 1 \text{ добиваме } x_1 = 10 \text{ а од } \lg x = \frac{2}{5} \text{ добиваме } x_2 = \sqrt[5]{100}.$$

$$\text{в)} \text{ Од } \frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1, \text{ со смената } \lg x = y \text{ се добива равенката: } \frac{1}{5 - y} + \frac{2}{1 + y} = 1 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0, \text{ чии решенија се } y_1 = 3, y_2 = 2. \text{ Тогаш од } \lg x = 3 \text{ добиваме } x_1 = 1000, \text{ а од } \lg x = 2, x_2 = 100.$$

► **Пример 4.** Да ги решиме равенките:

$$\text{а)} \log_x 3 + \log_3 x = 2, \text{ б)} \log_2 x + \log_4 x = 6, \text{ в)} \log_2 x \cdot \log_3 x = \log_2 3.$$

Решение.

$$\text{а)} \log_x 3 + \log_3 x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{y} + y = 2 \text{ (смена } y = \log_3 x) \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1, \text{ значи } \log_3 x = 1, \text{ одовде } x = 3.$$

$$\text{б) } \log_2 x + \log_4 x = 6 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = 6 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \log_2 x = 6 \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16.$$

$$\text{в) } \log_2 x \cdot \log_3 x = \log_2 3 \Leftrightarrow \frac{\lg x}{\lg 2} \cdot \frac{\lg x}{\lg 3} = \frac{\lg 3}{\lg 2} \Leftrightarrow (\lg x)^2 = (\lg 3)^2 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}. \text{ (Провери ги решенијата!)} \\ \text{решенијата!)} \\$$

4. Равенки кои се решаваат со претходно логаритмирање на двете страни на равенката.

► **Пример 5.** Да ја решиме логаритамската равенка: $x^{3-\lg x} = 100$.

Решение. Со логаритмирање на двете страни на равенката $x^{3-\lg x} = 100$, таа се сведува на равенката: $\lg x^{3-\lg x} = \lg 100 \Leftrightarrow (3 - \lg x) \lg x = 2 \Leftrightarrow (\lg x)^2 - 3 \lg x + 2 = 0 \Rightarrow \lg x = 1, \lg x = 2$. Значи решенијата на дадената равенка се $x_1 = 10, x_2 = 100$.

Со методот на логаритмирање се решаваат и некои експоненцијални равенки.

► На пример, равенката: $4^x = 3$ од 1.1.2 сега можеме да ја решиме со логаритмирање на двете нејзини страни.

$$\text{Решение. } \lg 4^x = \lg 3 \Leftrightarrow x \lg 4 = \lg 3 \Rightarrow x = \frac{\lg 3}{\lg 4} = \frac{0,477}{0,602} = 0,792.$$

► Интересна е и равенката: $x^{x+1} = x, x \neq 0$.

Решение. Со логаритмирање на двете нејзини страни, добиваме: $\lg x^{x+1} = \lg x \Leftrightarrow (x+1) \lg x = \lg x \Leftrightarrow (x+1) \lg x - \lg x = 0 \Leftrightarrow x \lg x = 0 \Rightarrow x = 0$ и $\lg x = 0$, од каде решение на дадената равенка е $x=1$.

ЗАДАЧИ

Решете ги логаритамските равенки:

1. а) $\log_3 x = 2$, б) $\log_7 (3x-5) = 2$;

2. а) $\log_x 64 = 3$, б) $\log_x (x^2 - 2x + 4) = 2$;

3. а) $\lg (x+8) - \lg (x-2) = \lg 2$, б) $\lg (x-3) + \lg x = 1$;

4. а) $\lg^2 x = 2 + \lg x$, б) $(1 - 2 \lg x)(2 - \lg x) + 1 = 0$,

5. а) $\lg x^4 - \frac{30}{\lg x} = 2$, б) $\frac{2}{2 + \lg x} \div \frac{1}{4 - \lg x} = 1$;

6. а) $\log_2 x - \log_4 x + \log_{16} x = 3$, б) $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5$.

7. Решете ги равенките со логаритмирање на двете страни:

а) $5^{x+1} = 2$, б) $x^x = x$, в) $x^{\lg x} = 10$.

*8. Решете ја равенката: $\log_2 (4^x + 4) = x + \log_2 (2^{x+1} - 3)$.

1. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Пресметај: а) $a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$; б) $a^{-\sqrt{3}} : a^{(\sqrt{3}-1)^2}$; в) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^2 : \sqrt[3]{a^{3\sqrt{2}}}$.

2. Нацртај го графикот на функциите: а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$; б) $y = 2 - 2^{x+1}$.

Реши ги експоненцијалните равенки:

3. а) $2^{x-3} = 8^{x+1}$; б) $2^{2x-3} = 4\sqrt{2}$; в) $2 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x$.

4. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; б) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{1-x} = 0.6$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{64}{27}$.

5. а) $5^{2x-3} = 25^{x^2-3x-1}$; б) $\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}}$.

6. а) $3^x + 3^{x+1} = 108$; б) $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$.

7. а) $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 15 = 0$; б) $3^x + 9^{x-1} - 8 \cdot 10 = 0$.

8. а) $27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} + 3 = 0$; б) $5 \cdot \sqrt[3]{64} - 7 \cdot \sqrt[3]{8} - 6 = 0$.

9. Пресметај:

а) $25^{\frac{1}{4} \log_5 36}$; б) $(0.25)^{\frac{1}{4} \log_2 9}$; в) $49^{-0.25 \log_7 9}$;

б) $\sqrt{3^{4 \log_9 5}}$; в) $8^{\log_4 5 \cdot \log_5 4}$.

10. Пресметај:

а) $\log_2 11 - \log_2 44$; $\log_{0.3} 9 - 2 \log_{0.3} 10$; $\log_8 16 + \log_{\frac{1}{3}} 3$;

б) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4} \cdot \frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7} \cdot \frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3}$.

в) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$; $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$.

11. Нацртај го графикот на функциите: а) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$; б) $y = 1 - \log_3(x+2)$.

Реши ги логаритамските равенки:

12. а) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{2}} x) = -1$; б) $\log_7(\log_3(\log_2(\log_2 x))) = 0$.

13. а) $\log_{x-2}(x^3 - 56) = 3$; б) $\log_2 \sqrt{(1-x)^2} = 3$.

14. а) $\lg(x+2) + \lg(x-1) = \lg 4$; б) $\lg(x+1) = \lg 6 - \lg x$.

15. а) $\lg^2 x = 2 + \lg x$; б) $\frac{1}{\lg x} = 2 + \lg \frac{1}{x}$.

16. а) $\log_5 x + \log_x 5 = 2.5$; б) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.

17. а) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5.5$; б) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

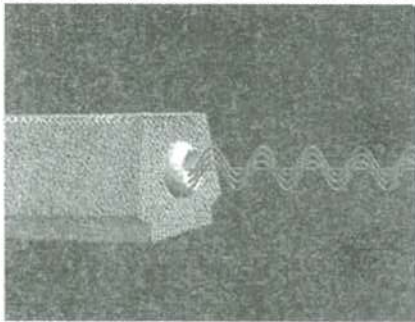
Реши ги равенките:

18. а) $5^{\log_2 x} = 25$; б) $\sqrt{5^{\log_5 4}} = \log_3 x$.

19. а) $x^2 - x - x^{\log_6 6} = 0$; б) $2^{2 \log_2 x} - x = 6$.

20. $2^{2+\lg x} + 2^{\lg x} = 20$.

ПРИРОДА. ЖИВОТ. МАТЕМАТИКА.



Ласер



Звучни осцилации

- Дали ја знаејте разликата меѓу ласер и масер (не "масер")?

И двата се релативно нови уреди, ласерот е откриен 1960., неколку години после конструирањето на масерот во 1954. Принципот на дејство на двата уреди, масерот и ласерот е ист. Тоа се квантно електронички уреди кои базираат на стимулирана емисија на електромагнетно зрачење и се разликуваат само по фреквенциите на засилување, односно генерирањето на бранови со кои оперираат. Масерите работат во дијапазонот на микробраново зрачење (microwave), додека ласерите се генератори на брановите од видливиот дел на спектарот на електромагнетното зрачење, оптичките бранови (light).

- Каква е нивната врска со математиката и воопшто врската меѓу физиката и математиката?

Огромна, испреплетена како во минатото така и денес. Електромагнетното зрачење, електромагнетните бранови, споменати кај масерот и ласерот во воведот, се периодична промена на електромагнетното поле предизвикана со осцилирање (забрзано движење) на наелектризираните честици.

Осцилирањето се опишува со математичкиот апарат кој е во основата на содржините од темата што следи. А еве и еден пример на механички осцилации, кои се надеваме дека ќе го разбереш по изучувањето на оваа тема ако бидеш доволно упорен и се задлабочиш во него, како што и треба во едуцирањето и науката. Со новите поими што ќе ги сретнеш во него ќе се запознаеш наскоро, но секако ќе останат и работи кои ќе треба да ги научиш подоцна.

Пример: Материјална точка со маса $m = 5g$ врши хармонични осцилации со амплитуда $A = 3cm$ и фреквенција $f = 0,5 s^{-1}$. Да ја определиме брзината на точката кога таа се наоѓа на расипање $y = 1,5 cm$ од рамнотежната положба.

Решение: Равенката на хармоничното осцилаторно движење е: $y = A \sin(\omega t + \phi_0)$. (1)

Равенката на брзината на точката е: $v = A \omega \cos(\omega t + \phi_0)$. (2)

(Употребените ознаки се преземени од физиката: y - поместување на телото во даден момент на време t , A - амплитуда, ω - кружна фреквенција, ϕ_0 - почетна фаза, $\omega t + \phi_0$ - фаза на осцилациите).

Имаме: $m = 5g = 5 \cdot 10^{-3} kg$; $A = 3cm = 5 \cdot 10^{-2} m$; $f = 0,5 s^{-1}$; $y = 1,5 cm = 1,5 \cdot 10^{-2} m$.

Ако ги квадрираме и потоа собереме равенките (1) и (2) добиваме: $\frac{y^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \omega^2} = 1$.

Бидејќи $\omega = 2\pi f$, имаме: $\frac{y^2}{A^2} + \frac{v^2}{4A^2 \pi^2 f^2} = 1$, од каде за брзината v добиваме: $v = \pm 2\pi f \sqrt{A^2 - y^2}$.

На растојание $y = 1,5cm$ од рамнотежната положба, брзината на точката ќе биде: $v = \pm 8,2 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s}$.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

2.1. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

Минатата учебна година се запознавме со поимот тригонометриска функција од остар агол во правоаголен триаголник. Сега ќе се запознаеме и ќе ги изучиме својствата на тригонометриските функции за кои аргументот е произволен агол, ориентиран агол или реален број. За таа цел прво ќе го прошириме поимот за агол.

2.1.1. ПРОШИРУВАЊЕ НА ПОИМОТ АГОЛ. МЕРЕЊЕ НА АГОЛ

Според дефиницијата на аголот, со која си се запознавме досега, големината на аголот мерен во степени може да изнесува најмалку 0° а најмногу 360° , и во радијани најмалку 0 а најмногу 2π радијани. Тоа значи дека не можеме да оперираме со агли поголеми од полниот агол. Но при собирање на агли или при множење на агол со број добиваме агли со мера поголема од 360° (2π радијани), а ако од помал агол одземаме поголем добиваме агол чија мера е изразена со негативен број степени или радијани.

На пример, $330^\circ + 320^\circ = 650^\circ$, $4 \cdot 270^\circ = 1180^\circ$, $60^\circ - 80^\circ = -20^\circ$, итн.

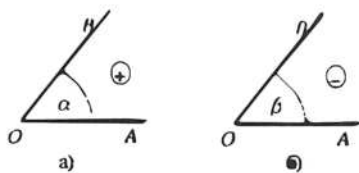
За потребите на тригонометријата, физиката, механиката и други науки, треба да ги определиме и ваквите агли. Тоа ќе го направиме така што најпрвин ќе воведеме поим **ориентиран агол**, а потоа и **вообичаен агол**.

1. Ориентиран агол. На црт.1 е претставен агол со теме O и краци OA и OB . Овој агол можеме да го добиеме ако еден од краците OA или OB го ротираме околу темето O додека да се совпадне со другиот крак.

Ако од двете можни насоки на ротација едната ја избереме за **позитивна насока**, другата е **негативна**. Вообичаено, за позитивна насока на ротација ја избираме насоката што е спротивна на вртењето на стрелките на часовникот (поставен со предната страна спроти нас).

Дефиниција 1. **Ориентиран агол** претставува делот од рамнината што го опфаќа дадена полуправа со ротација околу почетната точка од некоја почетна положба, земена како прв крак на аголот, до крајната положба, земена како втор крак на аголот.

Ако ротацијата е во позитивна насока добиваме **позитивно ориентиран агол** (скрашено: **позитивен агол**), а ако ротацијата е во негативна насока добиваме **негативно ориентиран агол** (скрашено: **негативен агол**).

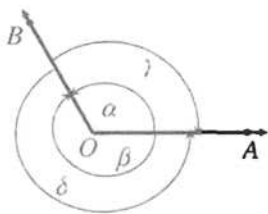


црт.2

При геометриско претставување на ориентираните агли насоката на аголот ја назначуваме со стрелка на крајот на лакот со кој го обележуваме аголот.

На пример, аголот α на црт.2а е позитивно ориентиран агол со почетен крак OA и краен крак OB , а аголот β на црт.2б е негативно ориентиран агол со почетен крак OB и краен крак OA .

При запишување на ориентираните агли почетниот крак го ставаме на прво место, а крајниот крак на второ. На пример, за аглиите на црт.2 запишуваме: $\alpha = \angle(OA, OB)$ и $\beta = \angle(OB, OA)$.



црт.3

Сигурно веќе и самиот забележуваш дека, со една и иста положба на краците се определени повеќе ориентираните агли.

На пример, за дадената положба на краците OA и OB на црт. 3 се определени 4 ориентираните агли: два позитивни (α и δ) и два негативни (β и γ).

Дефиниција 2. Ориентираните агли што имаат исти почетен и краен крак ќе ги викаме **козавршни агли**.

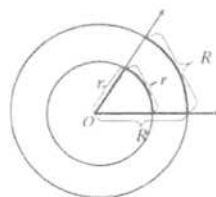
На црт.3 козавршни агли се: α со β , а γ со δ .

2. Мерење на ориентираните агли. Минатата учебна година се запозна со мерните единици за мерење на аглиите: **степен** и **радијан** и со релацијата што ги поврзува овие две мерни единици. Ќе направиме само кратко потсетување.

Еден радијан (1rad) е мера на агол чии краци од произволна кружница со центар во темето на аголот отсекуваат лак чија должина е еднаква на радиусот на кружницата (црт.5).

Еден аголен степен (1°) е мера на агол кој е $\frac{1}{360}$ од полниот агол.

Во кружница со радиус r , на централен агол од θ радијани одговара лак $l = \theta \cdot r$, а радијанската мера на централен агол кој соодветствува на кружен лак со должина l е $\alpha = \frac{l}{r}$.



црт.4

Преминот од една во друга аголна мера се остварува со формулите

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.0174 \text{ rad}; \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''; \quad 1' = \left(\frac{1}{60} \right)^\circ \approx 0.00029 \text{ rad}.$$

Ако радијанската мера на аголот е θ , а степенската мера е α , тогаш

$$\theta = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \theta.$$

Со помош на овие формули ја составуваме следната таблица за изразување на некои агли во степени и радијани (добро е да ги запамтиш):

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Ориентираните агли ги мериме со истите мерни единици како и неориентираните, со степени и радијани, при што *мерниот број за позитивниот агол е позитивен број, а за негативниот агол е негативен број*. На пример, со $\alpha = +45^\circ$ (во радијани $\alpha = +\frac{\pi}{4}$), ќе го означиме

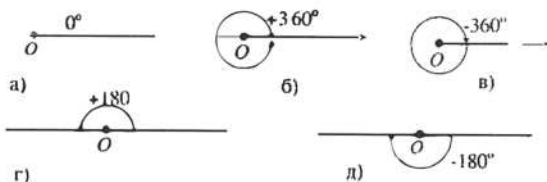
аголот чија големина е 45° и е позитивно ориентиран, а $\beta = -45^\circ$ (во радијани $\beta = -\frac{\pi}{4}$) е агол со големина 45° , но негативно ориентиран.

Најчесто, ако аголот е позитивен, го испуштаме знакот “+”.

Ако кракот остане во почетната положба без да направи некоја ротација добиваме **нулти агол** со мера 0° (или 0rad.) (црт.5а). Нултиот агол е единствен агол кој нема ориентација.

Ако почетниот крак го ротираме околу O во “+” насока додека да се совпадне со почетната положба добиваме **полн агол** со мера $+360^\circ$ ($+2\pi$) (црт.5б) и **полн агол** со мера -360° (-2π), ако ротацијата е во “-” насока (црт.5в).

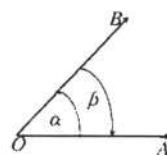
Ориентиран агол на кој почетниот и крајниот крак образуваат права е **рамен агол** со мера $+180^\circ$ (црт.5г) или -180° (црт.5д)



црт.5

Дефиниција 3. Два ориентирани агла се еднакви ако имаат иста големина и се со иста ориентација.

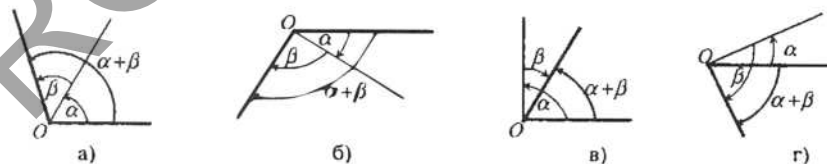
Аглите $\alpha = \angle(OA, OB)$ и $\beta = \angle(OB, OA)$ на црт.6 се со иста големина но со спротивна насока, и тие не се еднакви. За ваквите агли викаме дека се **спротивно ориентирани** и пишуваме $\angle(OA, OB) = -\angle(OB, OA)$.



црт.6

3. Операции со ориентирани агли. Збирот $\alpha + \beta$ на ориентираните агли α и β го определуваме по истата постапка како и неориентираните агли: на крајниот крак од аголот α , како почетен крак за β , го надоврзуваме аголот β . Притоа се можни следниве случаи:

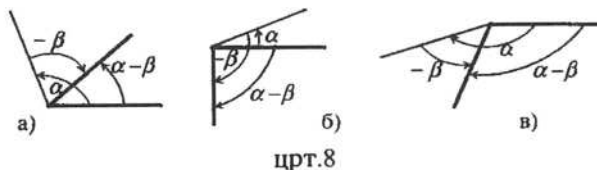
- α и β се и двата позитивни (црт.7а) или и двата негативни агли (црт.7б);
- α е позитивен, β е негативен и притоа $|\alpha| > |\beta|$ (црт.7в);
- α е позитивен, β е негативен и притоа $|\alpha| < |\beta|$ (црт.7г).



црт.7

- **Пример 1.** Да го најдеме збирот $\alpha + \beta$ за аглиите: а) $\alpha = +60^\circ, \beta = +50^\circ$; б) $\alpha = -45^\circ, \beta = -60^\circ$; в) $\alpha = +90^\circ, \beta = -30^\circ$; г) $\alpha = +30^\circ, \beta = -90^\circ$;
Решение. а) $60^\circ + 50^\circ = 110^\circ$ (црт.7а); б) $(-45^\circ) + (-60^\circ) = -105^\circ$ (црт.7б);
 в) $90^\circ + (-30^\circ) = 60^\circ$ (црт.7в); г) $30^\circ + (-90^\circ) = -60^\circ$ (црт.7г) ■

Разликата $\alpha - \beta$ на ориентираните агли α и β ја определуваме како збир на аголот α со спротивниот агол на β , т.е. $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ (црт.8).



црт.8

Пример 2. Да ја определиме разликата $\alpha - \beta$ за аглиите: а) $\alpha=120^\circ, \beta=70^\circ$;

б) $\alpha=30^\circ, \beta=120^\circ$; в) $\alpha=-160^\circ, \beta=-50^\circ$

Решение. а) $120^\circ - 70^\circ = 120^\circ + (-70^\circ) = 50^\circ$ (црт.8а)

б) $30^\circ - 120^\circ = -90^\circ$ (црт.8б);

в) $-160^\circ - (-50^\circ) = -110^\circ$ (црт.8в).

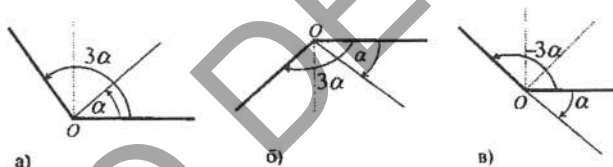
Производот $k\alpha$ на ориентираниот агол α со бројот $k \in \mathbb{R}$ е агол чија големина е $|k| \cdot |\alpha|$, и има иста ориентација со α ако е $k > 0$, а е со спротивна ориентација од α ако е $k < 0$ (црт.9).

Пример 3. Да ги определиме производите: а) $3 \cdot 45^\circ$; б) $3 \cdot (-45^\circ)$; в) $(-3) \cdot (-45^\circ)$.

Решение. а) $3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$ (црт.9а);

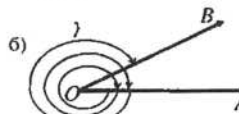
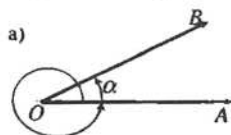
б) $3 \cdot (-45^\circ) = -135^\circ$ (црт.9б);

в) $(-3) \cdot (-45^\circ) = 135^\circ$ (црт.9в).



црт.9

4. Воопштен агол. Ќе направиме уште едно воопштување на поимот агол така што, покрај ротацијата што почетниот крак ја прави додека да се совпадне со крајниот крак, ќе ги мериме и завртувањата на почетниот крак поголеми од едно полно завртување.



црт.10

Ако полуправата OA направи, на пример, едно полно завртување околу O во позитивна насока, а потоа опише агол α , помал од полниот агол, го добиваме аголот $\angle(OA, OB) = 360^\circ + \alpha$ (црт.10а)

Ако, при истата положба на почетниот и крајниот крак, кракот OA за да се совпадне со кракот OB направи, на пример, две полни завртувања во негативна насока, а потоа и агол γ во негативна насока, кој е дел од полното завртување, го добиваме аголот $\angle(OA, OB) = -2 \cdot 360^\circ + \gamma$, $-360^\circ < \gamma < 0^\circ$ (црт.10б)

Дефиниција 4. Аголот чиј мерен број го апсолутно го големина е во интервалот $[0^\circ, 360^\circ)$ (во степени) или $[0, 2\pi)$ (во радијани), го викаме **елементарен агол**.

Со даден почетен и краен крак аголот не е еднозначно определен, но постои бесконечно множество агли чиј почетен и краен крак се во иста положба. Сите тие агли се разликуваат еден од друг за цел број полни завртувања (позитивни или негативни).

Дефиниција 5. Аголот за кој се дадени почетниот и крајниот крак и е даден бројот и насоката на полните завртувања што треба да ги направи почетниот крак за да се совпадне со крајниот крак, го викаме **воопштен агол**.

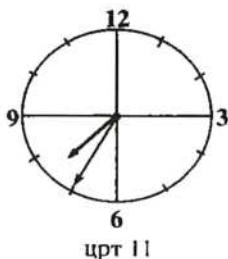
Од дефиницијата следува: мерниот број на воопштениот агол е $\alpha + k \cdot 360^\circ$ (во степени) или $\alpha + 2k\pi$ (во радијани), $k \in \mathbb{Z}$, (1)
 каде k е бројот на полните завртувања во “+” или “-”, а α е елементарен агол.

➤ **Пример 4.** Да ги запишеме во вид (1) аглиите: а) 840° ; б) -960°

Решение. Имаме: а) $840^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 120^\circ$

б) $-960^\circ = (-2) \cdot 360^\circ - 240^\circ$ или

$-960^\circ = (-3) \cdot 360^\circ + 120^\circ$.



црт 11

➤ **Пример 6.** Ако стрелките на часовникот покажуваат 7 часот и 35 минути наутро, колкав агол ќе опише минутната стрелка кога ќе покажува 3 часот појладне.

Решение. За часовникот да покажува 8 часот наутро големата стрелка треба да се заврти за 150° (црт.10). Бидејќи од 8 до 3 часот попладне (15 часот) треба да поминат 7 часа, големата стрелка треба да направи уште 7 полни завртувања (во негативна насока). Следува, големата стрелка ќе опише агол

$$-150^\circ + (-7) \cdot 360^\circ = -2670^\circ$$

Размисли! Колкав агол ќе опише часовната стрелка.

ЗАДАЧИ

1. Определи го и графички претстави го збирот $\alpha + \beta$ за аглиите:

а) $\alpha = 210^\circ$, $\beta = -60^\circ$; б) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$.

2. Определи ја и графички претстави ја разликата $\alpha - \beta$ за аглиите:

а) $\alpha = -215^\circ$, $\beta = -30^\circ$; б) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{8}$.

3. Определи го и графички претстави го производот:

а) $2 \cdot 75^\circ$; б) $3 \cdot (-\frac{\pi}{2})$; в) $(-4) \cdot \frac{\pi}{8}$.

4. Претстави го аголот во вид $\alpha + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, каде α е елементарен агол: а) -270° ; б) 450° ; в) -960° ; г) 1800° ; д) -2751°

5. Определи го бројот на полните завртувања или делот од полното завртување за аглиите чија мера изразена во степени е.

а) -330° ; б) 45° ; в) 120° ; г) 800° д) -12° ; ф) 15° , е) -700° ; ж) -1080° .

6. Без употреба на калкулатор претвори ги степените во радијани:

а) 15° ; б) -75° ; в) 105° ; г) -145° ;
 в) 300° ; г) 72° ; ф) 520° ; е) 450° ;
 ж) -390° ; и) 1040° ; ј) -2500°

7. Претстави го аголот во вид $\alpha + 2k\pi$, каде $k \in \mathbb{Z}$, а α е елементарен агол, $0 \leq \alpha < 2\pi$.

а) 15π ; б) $\frac{14\pi}{3}$; в) $-\frac{11\pi}{5}$; г) $\frac{23\pi}{8}$; д) $-\frac{31\pi}{6}$.

8. Претстави ги во степени (без употреба на калкулатор) следниве радијани: а) $\frac{5\pi}{12}$; б) $\frac{17\pi}{4}$;

в) $-\frac{16\pi}{3}$; г) $\frac{31\pi}{6}$; д) $-\frac{23\pi}{2}$; ф) $\frac{13\pi}{8}$.

9. Запченик со 72 запци се завртува за. а) 3 запци; б) 4 запци; в) 18 запци. Пресметај го аголот што го опишува запченикот во степени и радијани.

10. Изрази го во степени и радијани аголот што го опишува за едно деноноќие

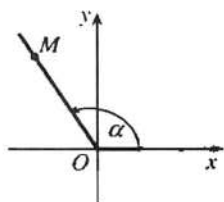
а) часовната стрелка; б) минутната стрелка.

11. Изрази го во радијани внатрешниот агол на правилен

а) 6-аголник; б) 12-аголник; в) 24-аголник.

2.1.2. ДЕФИНИЦИЈА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

1. Со цел да ја прошириме дефиницијата за тригонометриските функции од остар агол во правоаголен триаголник и за тригонометриските функции од произволен агол, ќе ги нанесуваме аглите во избран правоаголен координатен систем xOy така што темето да им биде во координатниот почеток, а почетниот крак на позитивниот дел од апсцисната оската.



црт.1

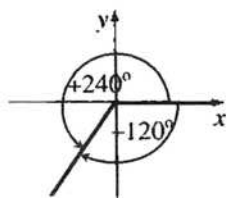
аголот α е во II-от квадрант (црт.1).

Дефиниција 1. Аголот α е во стандардна положба ако неговото теме е во координатниот почеток O на правоаголниот координатен систем xOy , а почетниот крак се совпаѓа со позитивната насока на Ox -оската (црт.1)

Ќе ги именуваме аглите и во зависност од тоа во кој квадрант е крајниот крак на аголот. На пример, ако аголот α е во стандардна положба, а крајниот крак OM е во II-от квадрант, ќе викаме дека аголот α е во II-от квадрант (црт.1).

➤ **Пример 1.** Да определиме во кој квадрант се аглише:

а) $\alpha = 950^\circ$; б) $\beta = -2280^\circ$; в) $\gamma = \frac{54\pi}{5}$.



црт.2

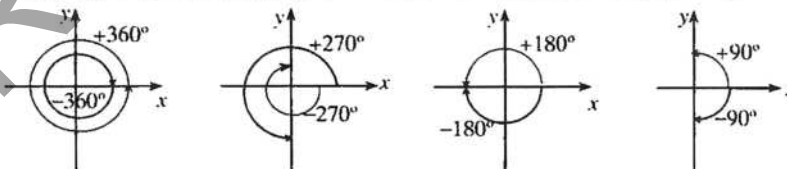
Решение. а) Имаме: $950^\circ = 230^\circ + 2 \cdot 360^\circ$. Бидејќи $230^\circ \in (180^\circ, 270^\circ)$, аголот $\alpha = 950^\circ$ е во III квадрант;

б) $-2280^\circ = -120^\circ - 6 \cdot 360^\circ$. Бидејќи $-120^\circ \in (-90^\circ, -180^\circ)$, следува дека $\beta = -2280^\circ$ е агол во III квадрант (црт.2). Може и вака:

$-2280^\circ = -7 \cdot 360^\circ + 240^\circ$, при што аголот $240^\circ \in (180^\circ, 270^\circ)$ е козавршен со аголот -120° .

в) $\frac{54\pi}{5} = \frac{50+4}{5}\pi = 10\pi + \frac{4}{5}\pi = 5 \cdot 2\pi + \frac{4}{5}\pi$. Бидејќи $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, аголот $\gamma = \frac{54\pi}{5}$ е во II квадрант.

Дефиниција 2. Аголот во стандардна положба чиј краен крак се совпаѓа со Ox или Oy оската, ќе го викаме **квадрантен агол**.

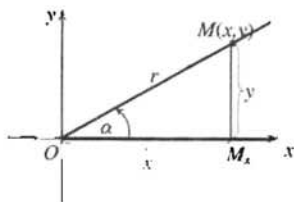


црт.3

Квадрантни агли се, на пример. аглите со мера: -360° , -270° , -180° , -90° , 90° , 180° , 270° и 360° (црт.3), но и секој агол што се разликува од нив за цел број полни завртувања.

Да забележиме дека за квадрантните агли важат следниве разложувања:

$$-360^\circ = -4 \cdot 90^\circ, -270^\circ = -3 \cdot 90^\circ, -180^\circ = -2 \cdot 90^\circ, \\ 180^\circ = 2 \cdot 90^\circ, 270^\circ = 3 \cdot 90^\circ, 360^\circ = 4 \cdot 90^\circ$$



црт.4

2. Нека α е остар агол во првиот квадрант, и нека $M(x, y) \neq O(0,0)$ е произволна точка на крајниот крак на аголот (црт.4). Во триаголникот OM_xM : $x = \overline{OM_x}$ е налегната катета за аголот α , $y = \overline{M_xM}$ е спротивна катета за аголот α , а $r = \overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}$ е хипотенуза.

Да се потсетиме: за остриот агол α во триаголникот OM_xM тригонометриските функции синус, косинус, тангенс и котангенс се определени со равенствата:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}. \quad (1)$$

Следејќи ги овие дефиниции ќе ги дефинираме тригонометриските функции синус, косинус, тангенс и котангенс од произволен агол. За таа цел ќе ја докажеме следнава

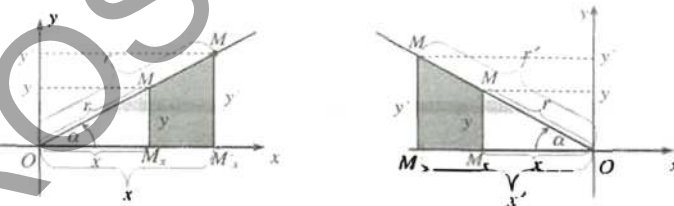
Теорема. За произволно избрана точка $M(x, y)$ на крајниот крак од аголот α во стандардна положба, секој од односиите

$$\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{x}{y}, \frac{y}{x} \quad (2)$$

е еднозначно определен или не постои.

Доказ: а) Нека $\alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, односно α не е квадрантен агол. Да земеме, на пример, агли во I и II квадрант (црт.5). Нека $M(x, y)$ и $M'(x', y')$ се две произволни точки на крајниот крак на аголот α , при што $M \neq O, M' \neq O$. Да ги разгледаме сличните триаголници:

$$\triangle OM_xM \sim \triangle OM'_xM' \quad (3)$$



црт.5

Должините на катетите на $\triangle OM_xM$ и $\triangle OM'_xM'$ се апсолутните вредности од координатите на точките M и M' , т.е. $\overline{OM_x} = |x|$, $\overline{MM_x} = |y|$, $\overline{OM'_x} = |x'|$ и $\overline{M'M'_x} = |y'|$, а хипотенузите се $r = \overline{OM}$ и $r' = \overline{OM'}$. Од сличноста (3), на пример, следува:

$$\frac{\overline{OM}_x}{\overline{OM}'_x} = \frac{|x'|}{|x|} = \frac{r'}{r} \quad \text{односно} \quad \frac{|x'|}{r'} = \frac{|x|}{r}.$$

Бидејќи точките M и M' се во ист квадрант, апсцисите x и x' се броеви со ист знак (и двата се позитивни или негативни), па односите $\frac{x}{r}$ и $\frac{x'}{r'}$ се совпаѓаат, не само по апсолутна вредност, туку и по знак. Следува $\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$, што значи дека за даден агол α односот $\frac{x}{r}$ не зависи од изборот на точката M .

За преостанатите три односи теоремата се докажува аналогно.

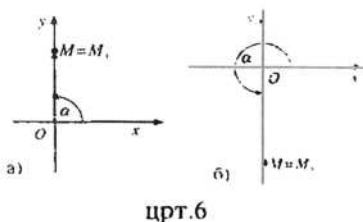
б). Нека α е квадрантен агол, т.е. $\alpha = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. За

произволно избраната точка M на крајниот крак имаме:

1^о за $M \in Oy$ -оската, $x = 0$, $|y| = r$, и тогаш:

ако $M \in +Oy$, $\frac{x}{r} = 0$, $\frac{y}{r} = 1$, $\frac{x}{y} = 0$, $\frac{y}{x}$ не постои (црт.6а);

ако $M \in -Oy$, $\frac{x}{r} = 0$, $\frac{y}{r} = -1$, $\frac{x}{y} = 0$, $\frac{y}{x}$ не постои (црт.6б);

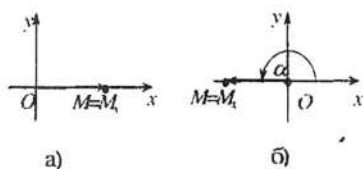


црт.6

2^о за $M \in Ox$ -оската, $y = 0$, $|x| = r$, и тогаш:

ако $M \in +Ox$, $\frac{y}{r} = 0$, $\frac{x}{r} = 1$, $\frac{y}{x} = 0$, $\frac{x}{y}$ не постои (црт.7а);

ако $M \in -Ox$, $\frac{y}{r} = 0$, $\frac{x}{r} = -1$, $\frac{y}{x} = 0$, $\frac{x}{y}$ не постои (црт.7б) ♦



црт.7

Од теоремата следува дека на даден агол може да му придружиме по еден реален број $\frac{x}{r}$ или $\frac{y}{r}$, а кога $x \neq 0$ или $y \neq 0$ и по еден реален број $\frac{y}{x}$ или $\frac{x}{y}$. Со овие односи ги определуваме функциите синус, косинус, тангенс и котангенс од аголот α .

Дефиниција 1. Синус на аголот α е односот помеѓу ординатата y на произволна точка M од крајниот крак на аголот α во стандардна положба и растојанието r на точката M од координатниот почеток O , т.е.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad (4)$$

Дефиниција 2. Косинус на аголот α е односот помеѓу апсцисата x на произволна точка M од крајниот крак на аголот α во стандардна положба и растојанието r на точката M од координатниот почеток O , т.е.

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \quad (5)$$

Дефиниција 3. Танџенс на аголот α е односот помеѓу ординатата y и апсцисата x на произволна точка M од крајниот крак на аголот α во стандардна положба, т.е.

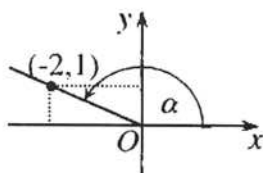
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \quad (6)$$

Дефиниција 4. Котанџенс на аголот α е односот помеѓу апсцисата x и ординатата y на произволна точка M од крајниот крак на аголот α во стандардна положба, т.е.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0 \quad (7)$$

Пример 2. Да ги определиме вредностите на тригонометриските функции $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, ако крајниот крак на аголот α ја содржи точката $M(-2, 1)$.

Решение. Овде $x = -2$, $y = 1$ и $r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, па според дефинициите 1 – 4 имаме



црт.8

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{-2}{1} = -2 \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

1. Во кој квадрант е аголот:

- а) 75° ; б) 327° ; в) 3151° ; г) 286° ; д) 359° ;
 е) -98° ; ж) -300° ; з) -589° ; и) -1272°

2. Во кој квадрант е аголот:

- а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{7\pi}{8}$; г) $\frac{29\pi}{9}$;
 д) $\frac{11\pi}{3}$; е) $-\frac{7\pi}{6}$; ж) $-\frac{24\pi}{5}$

3. Во правоаголен координатен систем се дадени точките: а) $(-1, 3)$; б) $(-2, -1)$; в) $(2, -3)$.

Скицирај по два козавршни агли на чиј краен крак припаѓа дадената точка. Во кој квадрант се тие агли?

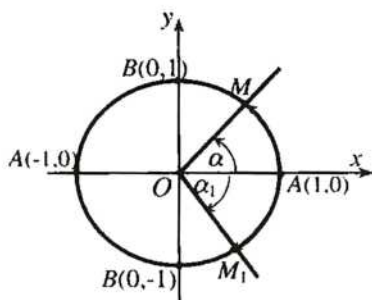
4. Определи ги тригонометриските функции $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ ако крајниот крак на аголот α во стандардна положба ја содржи точката:

- а) $(1, 0)$; б) $(0, 3)$; в) $(-3, 1)$; г) $(-4, 0)$;
 д) $(-3, 3)$; е) $(0, -4)$; ж) $(2, -5)$.

2.1.3. ДЕФИНИЦИЈА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ВО ТРИГОНОМЕТРИСКА КРУЖНИЦА.

1. Тригонометриска кружница. Нека во рамнината е зададен правоаголен координатен систем xOy .

Дефиниција 1. Кружницата $K(O,1)$, со центар во координатниот почеток O и радиус $r=1$, ја викаме **тригонометриска кружница**.



црт.1

Координатните оски ја делат рамнината, а заедно со неа и тригонометриската кружница K , на четири еднакви делови - **квадранти**. Пресечните точки на K со координатните оски се:

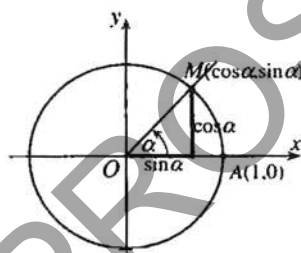
$$Ox \cap K = \{A(1,0), A_1(-1,0)\}; Oy \cap K = \{B(0,1), B_1(0,-1)\} \text{ (црт.1)}$$

Нека α е произволно избран агол во стандардна положба. Нему му соодветствува единствена точка M на $K(O,1)$, а тоа е пресечната точка на крајниот крак на α со K . Исто така, секоја точка M од кружницата определува централен агол чиј краен крак е правата OM , а на него одговара лак AM на кружницата опишан од точката A при ротација на кракот OA околу O до крајната положба OM . Ако аголот α е “+” ориентиран, тогаш и лакот AM е “+”

ориентиран; ако аголот α е “-” ориентиран, тогаш и лакот AM е “-” ориентиран.

Размисли! Дали точката M определува еден единствен агол?

2. Во т.2.2 покажавме дека тригонометриските функции не зависат од изборот на точката M на крајниот крак на аголот. Тоа значи дека вредностите на овие функции не зависат од тоа на кое растојание од координатниот почеток ќе ја земеме точката M . Ако за произволен агол α точката M ја избираме на исто растојание $r = \overline{OM} = 1$, таа ќе лежи на тригонометриската кружница, а аголот α (во стандардна положба) ќе го разгледуваме како



црт.2

агол што го образуваат два радиуса на тригонометриската кружница: $\overline{OA}$ како почетен крак и $\overline{OM}$ како краен крак на аголот α (црт.2). Тогаш тригонометриските функции синус и косинус од произволен агол α се:

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y, \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x.$$

Сега можеме да ги искажеме следниве дефиниции за тригонометриските функции синус и косинус:

Дефиниција 1'. Синусот на произволен агол α во стандардна позиција е еднаков на ординатата на пресечната точка M на крајниот крак на аголот со тригонометриската кружница, т.е.

$$\sin \alpha = y \quad (1')$$

Дефиниција 2: Косинусот на произволен агол α во стандардна положба е еднаков на апсцисата на пресечната точка M на крајниот крак на аголот со тригонометриската кружница, т.е.

$$\cos \alpha = x \quad (2')$$

Од (1') и (2') следува дека координатите на произволна точка $M(x,y)$ од тригонометриската кружница, која припаѓа и на крајниот крак од аголот α во стандардна положба, се вредности на тригонометриските функции синус и косинус од аголот α , т.е.

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha$$

Забелешка. Поради дефинициите 1' и 2' тригонометриските функции синус и косинус често се викаат **кружни функции**.

➤ **Пример 1.** На тригонометриската кружница да ја одредиме точката M која е на крајниот крак од аголот $\alpha = 30^\circ$.

Решение. Согласно со дефинициите 1' и 2' координатите на точката M се:

$$x = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \text{ Значи } M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \blacksquare$$

Од дефинициите 1' и 2' и неравенствата $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, кои ги задоволуваат апсцисата и ординатата на произволна точка од тригонометриската кружница, следува дека за произволен агол α важат неравенствата:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad \text{или} \quad |\sin \alpha| \leq 1 \quad (3)$$

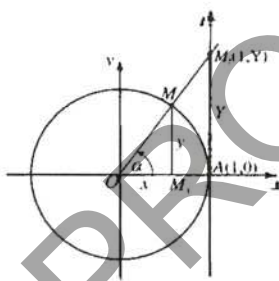
$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \quad \text{или} \quad |\cos \alpha| \leq 1 \quad (4)$$

Поради својствата (3) и (4) велиме дека функциите $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ се **ограничени функции**.

➤ **Пример 2.** Дали може да најдеме агол α такаков што: а) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; б) $\sin \alpha = \frac{3}{2}$.

Решение. а) Бидејќи $-1 < \frac{1}{3} < 1$, следува дека постои агол α такаков што $\cos \alpha = \frac{1}{3}$;

б) бидејќи $y = \sin \alpha$ и $\frac{3}{2} > 1$, не постои агол α за кој $\sin \alpha = \frac{3}{2}$ ■



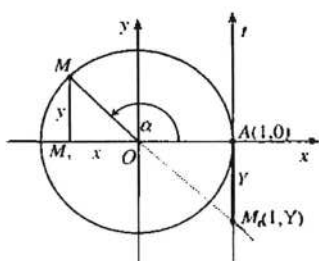
црт.3

За геометриско претставување на тангенсот и котангенсот ги воведуваме поимите **тангенсна** и **котангенсна оска**.

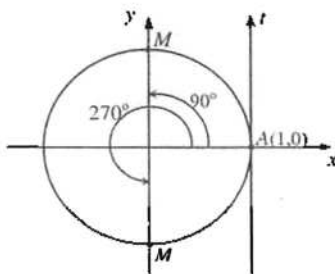
Тангенсна оска ја нарекуваме тангентата At на тригонометриската кружница K во точката $A(1,0)$, чија насока е еднаква со насоката на Oy -оската (црт.3).

Нека $\alpha = \angle AOM$ и $OM \cap At = M_1(1, Y)$, тогаш важи следново тврдење:

Тангенсот на аголот α е еднаков на ординатата Y на точката $M_1(1, Y)$, т.е.
 $\operatorname{tg} \alpha = Y. \quad (5)$



црт.4



црт.5

Навистина,

1° ако $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ (црт. 3), тогаш

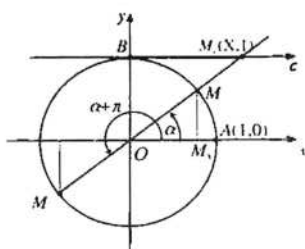
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{Y}{OA} = \frac{Y}{1} = Y \geq 0$$

2° ако $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ (црт.4), тогаш од сличноста $\triangle OMM_x \sim \triangle OM_xA$ имаме:

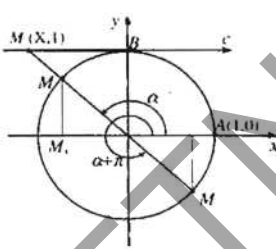
$$\frac{|y|}{|x|} = \frac{|Y|}{1} \Rightarrow \frac{y}{-x} = \frac{-Y}{1} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = Y \leq 0.$$

3° ако точката M е на ординатната оска ($\alpha=90^\circ$ или $\alpha=270^\circ$), тогаш $OM \parallel At$, па $OM \cap At = \emptyset$. т.е. $\operatorname{tg} \alpha$ не постои (црт.5) ♦

Аналогно толкување можеме да дадеме и за $\operatorname{ctg} \alpha$.



црт.6



Котангенсна оска ја нарекуваме оската Bc ишио ја доира шризоноеишиската кружна во шочкиа $B(0,1)$ и има ишиа насока со аишиснаиша оска.

Нека $M_c(X,1) = OM \cap Bc$ (црт.6). Од сличноста: $\triangle OMM_x \sim \triangle M_cOB$, со аналогни разгледувања како за тангенсот, според црт.6 добиваме:

Котангенсои на аголои α е еднаков на аишисаиша на шочкиа M_c , т.е.

$$\operatorname{ctg} \alpha = X \quad (6)$$

► **Пример 3.** Да ја оишределеме шризоноеишиската функција $\operatorname{tg} \alpha$ ако крајниои крак на аголои α ги содржи шочкиише: а) $(1, \sqrt{3})$; б) $(1, -2)$.

Решение. а) Точката $(1, \sqrt{3})$ лежи на тангенсната оска и согласно со (5): $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$.

б) Од исти причини како и под а) имаме: $\operatorname{tg} \alpha = -2$ ■

► **Пример 4.** Да ја оишределеме шризоноеишиската функција $\operatorname{ctg} \alpha$ ако крајниои крак на аголои α ги содржи шочкиише: а) $(1,1)$ б) $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$.

Решение. Точките за кои втората координата е 1, лежат на котангенсната оска.

Според (6), имаме: а) $\operatorname{ctg} \alpha = 1$ б) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ■

ЗАДАЧИ

1. На тригонометриската кружница определи ја точката M која е на крајниот крак на аголот: а) $\alpha = 45^\circ$; б) $\alpha = 60^\circ$.
2. На тригонометриската кружница нанеси точка чија апсциса е $x = \frac{1}{2}$. Колку такви точки има? Каква е нивната положба во однос на x -оската?
3. Кое од следниве равенства е можно: а) $\cos \alpha = 2 - \sqrt{2}$; б) $\sin \alpha = \sqrt{3} - 2$; в) $\cos \alpha = \sqrt{5} - 4$.

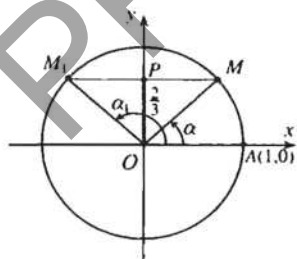
2.1.4. ГРАФИЧКО ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА АГОЛОТ И НА ВРЕДНОСТА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ЗА ДАДЕНА ВРЕДНОСТ НА ЕДНА ОД ФУНКЦИИТЕ. ЗНАК НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

1. Дефиницијата на тригонометриските функции ни овозможува графички да го определиме аголот ако е дадена вредноста на една од тригонометриските функции, како и вредностите на преостанатите тригонометриски функции.

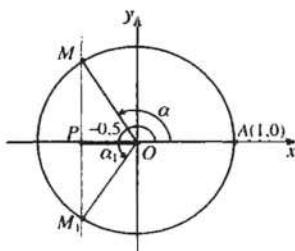
► **Пример 1.** Да го определиме графички аголот α ако е дадена вредноста на тригонометриската функција: а) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; б) $\cos \alpha = -0.5$

Решение. а) Според дефиницијата на функцијата $\sin \alpha$, на тригонометриската кружница K треба да ја определиме точката M во која вториот крак на аголот α ја сече кружницата, а чија ордината е еднаква на $\frac{2}{3}$. За таа цел на y -оската нанесуваме отсечка $\overline{OP} = \frac{2}{3}$, и низ P повлекуваме права паралелна со x -оската (црт.1). Пресечните точки на правата и кружницата, M и M_1 , ги определуваат аглиите α и α_1 чиј синус е еднаков на $\frac{2}{3}$.

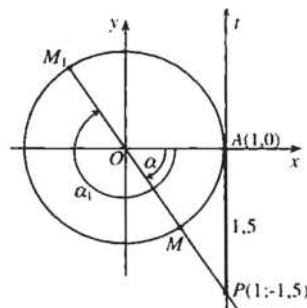
б) На кружницата $K(O,1)$ треба да определиме точка чија апсциса е -0.5 . На негативната насока од x -оската ја нанесуваме отсечката $\overline{OP} = 0.5$, и низ точката P повлекуваме права паралелна со y -оската (црт.2). Точките M и M_1 од кружницата K ги определуваат аглиите α и α_1 чиј косинус е -0.5 ■



црт.1



црт.2

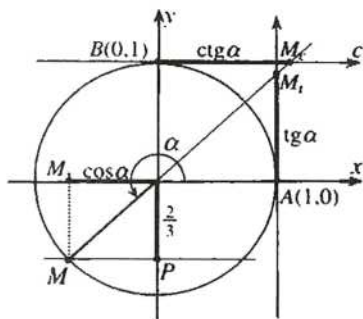


црт.3

➤ **Пример 2.** Да го определиме графички аголот α ако е дадена вредноста на тригонометриската функција $\operatorname{tg} \alpha = -1.5$.

Решение. На негативната насока од тангенсната оска нанесуваме отсечка $\overline{AP} = 1.5$. Низ точката $P(1; 1.5)$ и координатниот почеток O повлекуваме права p (црт.3). Пресечните точки M_1 и M_2 на правата и кружницата ги определуваат аглите α_1 и α_2 кои ќе ги измериме со агломер ■

➤ **Пример 3.** Да ги определиме графички вредностите на тригонометриските функции $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ ако е дадена вредноста $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ и α агол од III квадрант.



црт.4

Решение. Со иста конструкција, како во примерот 1, на негативната насока од y -оската нанесуваме отсечка $\overline{OP} = \frac{2}{3}$ и ја определуваме точката M (црт.4). Апсцисата x на точката M е бараната вредност на $\cos \alpha$. Во продолжението на правата OM во пресекот со тангенсната оска ја определуваме точката M_t , чија ордината е еднаква на $\operatorname{tg} \alpha$, а во пресекот со котангенсната оска точката M_c , чија апсциса е еднаква со вредноста на $\operatorname{ctg} \alpha$ ■

2. Знак на тригонометриските функции. Од дефиниците на тригонометриските функции следува дека **знакот** на нивната вредност за аглите во одделни квадранти го определуваме согласно знаците на координатите на точките во тие квадранти. Така имаме:

1. Синусната функција е позитивна за аглиите во I и II квадрант, а е негативна за аглиите во III и IV квадрант, т.е.

$$\sin \alpha > 0 \text{ за } 0 < \alpha < \pi \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ) \text{ и } \sin \alpha < 0 \text{ за } \pi < \alpha < 2\pi. \quad (180^\circ < \alpha < 360^\circ)$$

2. Косинусната функција е позитивна за аглиите во I и IV квадрант, а е негативна за агли во II и III квадрант, т.е.

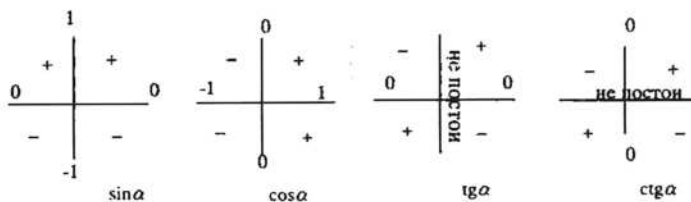
$$\cos \alpha > 0 \text{ за } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (-90^\circ < \alpha < 90^\circ) \text{ и } \cos \alpha < 0 \text{ за } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad (90^\circ < \alpha < 270^\circ)$$

3. Функциите тангенс и котангенс се позитивни за аглиите во I и III квадрант, а се негативни за аглиите во II и IV квадрант, т.е.

$$\operatorname{tg} \alpha > 0, \operatorname{ctg} \alpha > 0 \text{ за } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha < 0, \operatorname{ctg} \alpha < 0 \text{ за } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ и } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

Распоредот на знаците по квадранти можеме да го прикажеме шематски како на црт.5.



црт.5

► **Пример 4.** Да го утврдиме знакови на броевите без да ја определуваме вредноста на тригонометричките функции: а) $\sin 120^\circ$; б) $\cos 1000^\circ$; в) $\sin(-\frac{4\pi}{5})$.

Решение. а) Аголот $\alpha = 120^\circ$ е во II квадрант, затоа $\sin 120^\circ > 0$;
 б) аголот $\beta = 1000^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 280^\circ$ е агол во IV квадрант, затоа $\cos 1000^\circ > 0$;
 в) аголот $\gamma = -\frac{4\pi}{5} = -\pi + \frac{\pi}{5}$ е во III квадрант, затоа $\sin(-\frac{4\pi}{5}) < 0$. ■

► **Пример 5.** Да го утврдиме знакови на броевите: а) $\lg 220^\circ \cdot \lg(-1240^\circ)$; б) $\operatorname{ctg}(-\frac{12\pi}{5})$.

Решение. а) Аголот од 220° е во III квадрант, па затоа $\lg 220^\circ > 0$, а аголот $-1240^\circ = (-3) \cdot 360^\circ + (-160^\circ)$ е агол во III квадрант, па затоа е $\lg(-1240^\circ) > 0$. Следува, $\lg 220^\circ \cdot \lg(-1240^\circ) > 0$;

б) $-\frac{12\pi}{5} = -\frac{10\pi + 2\pi}{5} = -2\pi - \frac{2\pi}{5}$ е агол во IV квадрант, затоа $\operatorname{ctg}(-\frac{12\pi}{5}) < 0$. ■

► **Пример 6.** Да определиме во кој квадрант е аголот α ако е:

а) $\cos \alpha < 0$ и $\lg \alpha > 0$; б) $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha < 0$.

	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\lg \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

Решение. За определување на знакот на тригонометричките функции може да се послужиме и со табелата лево, според која лесно наоѓаме:

а) $\cos \alpha < 0$ и $\lg \alpha > 0$ ако аголот α е во III квадрант;

б) $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha < 0$ ако аголот α е во II квадрант. ■

ЗАДАЧИ

1. Определи го графички аголот α ако е дадена вредноста на тригонометричката функција:

а) $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$; б) $\cos \alpha = 0,25$; в) $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$; г) $\sin \alpha = 0,6$.

2. Определи го графички аголот α ако е дадена вредноста на тригонометричката функција

а) $\lg \alpha = -\frac{3}{2}$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = 1,5$.

3. Во кои квадранти: а) $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ имаат исти знаци; б) $\lg \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ имаат различни знаци;

в) $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ имаат исти знаци.

4. Во кои квадранти е: а) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$; б) $\cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha > 0$; в) $\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} < 0$.

5. Без да ја определуваш точната вредност, определи го знакот на изразите:

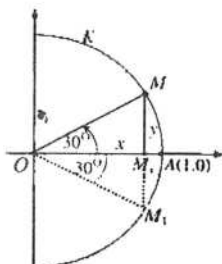
а) $\frac{\sin 120^\circ}{\operatorname{tg} 340^\circ}$; б) $\cos 73^\circ \cdot \operatorname{tg} 235^\circ$; в) $\frac{\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{ctg} 210^\circ}{\sin 250^\circ \cdot \cos 380^\circ}$; г) $\sin \frac{3\pi}{8} \cdot \cos \frac{5\pi}{4}$; д) $\frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}}$; ф) $\frac{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} \cdot \sin \frac{7\pi}{4}}{\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{3}}$

6. Ако $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), Одреди го знакот на изразот:

а) $\sin(180^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)$; б) $\frac{\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$; в) $\frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(270^\circ - \alpha)}$

2.1.5. ВРЕДНОСТИ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ОД НЕКОИ АГЛИ

Минатата учебна година ги одредивме вредностите на тригонометриските функции синус, косинус, тангенс и котангенс од аголот α еднаков на 30° , 45° и 60° , ако α е остар агол во правоаголен триаголник. Сега ќе покажеме како доаѓаме до истите вредности врз основа на дефиницијата на тригонометриските функции во тригонометриска кружница.



црт.1

1. Нека $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ($=30^\circ$) е аголот образуван од радиусот OM во тригонометриската кружница K (црт.1). Според дефиницијата на тригонометриските функции во кружницата K , имаме:

$$\sin \frac{\pi}{6} = y, \quad \cos \frac{\pi}{6} = x.$$

Од триаголникот OMM_1 , кој е рамностран триаголник со страна $OM = OM_1 = MM_1 = 1$ (зошто?) наоѓаме:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \overline{MM_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

од каде

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

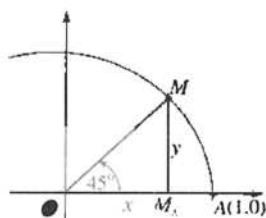
Исто така, $x = OM_x$ е висина во триаголникот OMM_1 , па следува $x = \frac{\overline{OM} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, од каде добиваме:

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

2. Нека $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($=45^\circ$) (црт.2). Триаголникот OM_xM е рамнокрак правоаголен



црт.2

триаголник (зошто?) со краци $\overline{OM_x} = x = y = \overline{M_xM}$, па според Питагоровата теорема имаме: $x^2 + y^2 = 1$ т.е. $2x^2 = 1$, од каде наоѓаме $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следува:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{y}{x} = 1, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = \frac{x}{y} = 1$$

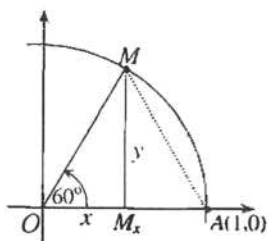
3. Нека $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ($=60^\circ$). Да го разгледаме триаголникот OMA на црт.3 со агол

$\alpha = \angle AOM = \frac{\pi}{3}$. Тој е рамностран триаголник (зошто?) со страна $\overline{OA} = \overline{OM} = \overline{MA} = 1$.

Нормалата $\overline{MM_x} = y$ е висина и тежишна линија во триаголникот OMA па имаме:

$$y = \overline{MM_x} = h = \frac{\overline{OM} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Следува:



црт.3

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. Ако $\alpha = 0$ или $\alpha = 2\pi$ тогаш првиот и вториот крак на аголот α се совпаѓаат со позитивниот дел на x -оската, а точката M , која е пресек на крајниот крак на аголот со тригонометриската кружница, се совпаѓа со точката $A(1,0)$ (црт.4а). Според тоа:

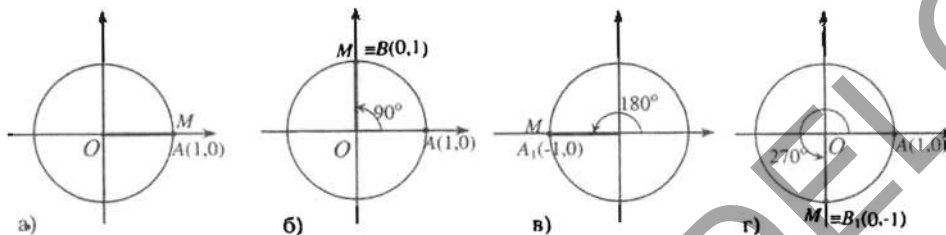
$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \operatorname{tg} 0 = \frac{0}{1} = 0, \quad \operatorname{ctg} 0 = \frac{1}{0} \text{ не постои}$$

5. Ако $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($=90^\circ$), вториот крак на аголот α се совпаѓа со позитивниот дел на y -оската, и точката M ќе се совпадне со точката $B(0,1)$ (црт.4б). Тогаш имаме:

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} \text{ не постои}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Ако $\alpha = \pi (=180^\circ)$, вториот крак на аголот α се совпаѓа со негативниот дел на x -оската, а точката M се совпаѓа со точката $A_1(-1,0)$ (црт.4в). Според тоа имаме:

$$\sin \pi = 0, \cos \pi = -1, \operatorname{tg} \pi = \frac{0}{-1} = 0, \operatorname{ctg} \pi = \frac{-1}{0} \text{ не постои}$$



црт.4

Ако $\alpha = \frac{3\pi}{2} (=270^\circ)$ вториот крак на аголот α се совпаѓа со негативниот дел на y -оската, точката M се совпаѓа со точката $B_1(0,-1)$ (црт.4г). Следува:

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1; \cos \frac{3\pi}{2} = 0; \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{0} \text{ не постои}; \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} = \frac{0}{-1} = 0$$

За вредностите на $\operatorname{tg} \alpha$ во околината на $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, и $\operatorname{ctg} \alpha$ во околината на $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ и $\alpha = 2\pi$ ќе стане збор подоцна.

► **Пример 1.** Да ја пресметаме вредноста на изразот: $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 270^\circ$.

Решение. Имаме: $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 270^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 0 = 0$. ■

► **Пример 2.** Да го провериме равенството: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, за $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Бидејќи $\cos 2\alpha = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \cos \pi = -1$ и

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 = 0 - 1 = -1$$

заклучуваме дека даденото равенство важи за $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Провери дали тоа важи за $\alpha = \frac{\pi}{6}$, а потоа и за $\alpha = 45^\circ$. ■

ЗАДАЧИ

1. Внеси ги соодветните вредности на тригонометриските функции во долната табела

	$0 (0^\circ)$	$\frac{\pi}{6} (30^\circ)$	$\frac{\pi}{4} (45^\circ)$	$\frac{\pi}{3} (60^\circ)$	$\frac{\pi}{2} (90^\circ)$	$\pi (180^\circ)$	$\frac{3\pi}{2} (270^\circ)$
$\sin \alpha$							
$\cos \alpha$							
$\operatorname{tg} \alpha$							
$\operatorname{ctg} \alpha$							

2. Докажи дека вредноста на изразот е нула:

а) $\sin \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\sin \pi}{\sin \frac{\pi}{2}}$; в) $\frac{\sin 0^\circ + \operatorname{tg} 0^\circ}{\sin 90^\circ + \cos 0^\circ}$.

3. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $2\cos 30^\circ + \sin 45^\circ + 3\operatorname{tg} 180^\circ$; б) $\sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}$; в) $1 - \operatorname{tg} 180^\circ - \operatorname{ctg} 270^\circ$.

4. Провери дали се точни равенствата

а) $(1 - \operatorname{ctg} 90^\circ) \cdot (1 + \operatorname{ctg} 90^\circ) = 1$; б) $(\frac{1}{\cos 60^\circ} + \frac{1}{\sin 30^\circ}) \operatorname{tg} 0^\circ = \sin 45^\circ - \cos 45^\circ$; в) $\frac{\operatorname{tg} 180^\circ}{\sin 45^\circ} + \frac{\operatorname{ctg} 270^\circ}{\cos 45^\circ} = 2$.

5. Одреди ја бројната вредност на изразите:

а) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{1 - \cos \alpha}$ за $\alpha = \frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$ за $\alpha = \frac{\pi}{2}$; в) $\frac{3\sin^2 \alpha}{4} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ за $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

6. Провери ги равенствата:

а) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, за $\alpha = 180^\circ$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha = 2\pi$; б) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, за $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = \pi$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$;

в) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, за $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = 270^\circ$, $\alpha = 0^\circ$.

МЕНЕЛАЈ (I. век)- старогрчки математичар и астроном. Познат по делото *Сферики*, сочувано во арапски превод, во кое, покрај астрономски расправи се содржани и прашања од сферната геометрија и особено од сферната тригонометрија. Во ова дело се сместени прочуените теореми, денес познати како *Менелееви теореми*, од кои едната со векови била основа на сферната тригонометрија.

2.1.6. НЕКОИ РЕЛАЦИИ ПОМЕЃУ ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ

Минатата учебна година се запозна со некои зависимости (релации) помеѓу тригонометриските функции од еден ист агол ако тој е остар агол во правоаголен триаголник. Сега ќе се потсетиме на некои од нив и истите ќе ги прошириме за произволен агол.

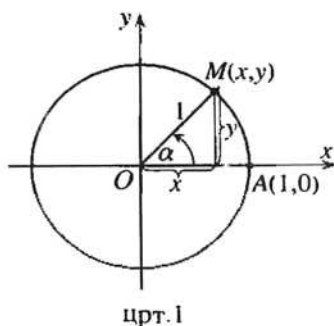
Дефиниција. Тригонометриски идентитет е нарекуваме равенството што содржи тригонометриски функции од агол, кое задоволено во сите оние вредности на аголот за кои се определени функциите на двесте неговии страни.

Вредностите на аголот α за кои дадено равенство е идентитет ги викаме **допуштени вредности** на аголот α .

Равенство што не е идентитет го викаме **условно равенство** или **равенка**. На пример, тригонометриското равенство

$$\sin x = \cos x$$

не е идентитет, туку равенка, бидејќи постојат вредности за x (на пример $x=0$) за кои равенството не е точно.



1. Збирот на квадратите на синусот и косинусот од произволен агол α е еднаков на единица, т.е.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

Доказ. Нека α е произволен агол чиј втор крак ја сече тригонометриската кружница во точката $M(x, y)$ (црт.1). Од Питагоровата теорема за триаголникот OMM_1 имаме

$$|x|^2 + |y|^2 = 1 \text{ или } x^2 + y^2 = 1. \quad (*)$$

Од друга страна, според дефиницијата на тригонометриските функции, за координатите x и y на точката M имаме

$x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ кои кога ќе ги замениме во (*) добиваме: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ♦

2. Тангенсот од аголот α е еднаков на количникот од синусот и косинусот од аголот α , т.е.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Доказ: Од дефиницијата на $\operatorname{tg} \alpha$, имаме: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ♦

3. Котангенсот од аголот α е еднаков на количникот од косинусот и синусот од аголот α :

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

И овој идентитет следува директно од дефиницијата на $\operatorname{ctg} \alpha$: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ♦

Во практиката често има потреба од користење на реципрочната вредност од функциите синус и косинус, па затоа ги дефинираме и овие функции.

4. **Секанс** од аголот α е реципрочната вредност на косинусот од аголот α , т.е.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (4)$$

5. **Косеканс** од аголот α е реципрочната вредност на синусот од аголот α , т.е.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi \quad (5)$$

Формулите (1)-(3) претставуваат основни тригонометриски зависимости (идентитети). Тие се добиваат независно еден од друг само врз основа на дефинициите на тригонометриските функции и се точни за сите допуштени вредности на аголот. Од нив со разни алгебарски трансформации можеме да добиеме други релации помеѓу тригонометриските функции. Ќе го прикажеме тоа на неколку примери:

6. Ако ги помножime левите и десните страни на (2) и (3) го добиваме идентитетот:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

7. Ако двете страни на идентитетот (1) ги поделime со $\cos^2 \alpha \neq 0$ добиваме:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

или

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (8)$$

8. Ако идентитетот (1) го поделime со $\sin^2 \alpha \neq 0$, го добиваме идентитетот:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

односно

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}. \quad (10)$$

9. Ако во формулата (10), согласно (6), ставиме $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ добиваме релација што ги поврзува синусот и тангенсот:

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Ползувајќи ги формулите (1) до (11) можеме да докажеме некои посложени идентитети или да упростуваме различни изрази, водејќи сметка за допуштените вредности на аргументот. Притоа не постои универзален метод за тоа како да ги докажеме, но само некои практични упатства. Еве некои сугестии:

1. Едната страна на равенството со помош на веќе познатите идентитети и идентични алгебарски трансформации ја сведуваме на другата страна. Вообичаено е да тргнеме од страната со посложен израз и паа да ја трансформираме до едноставната страна.

➤ **Пример 1.** Да го докажеме идентитетот $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.

Решение. Ќе тргнеме од левата страна на равенството. Имаме:

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \blacksquare\end{aligned}$$

➤ **Пример 2.** Да го докажеме идентитетот $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$.

Решение. Да напоменеме прво дека, не е исправно да “множиме вкрстено” се додека не покажеме дека ова равенство е идентитет, водејќи при тоа сметка за допуштените вредности на аголот: $\cos \alpha \neq 0, \sin \alpha \neq -1$ т.е. $\alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Бидејќи ниту едната страна не е посложена од другата, сеедно од која страна ќе тргнеме. Нека тргнеме од левата страна:

$$\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \blacksquare$$

2. Ги упростиваме двете страни на равенството одделно користејќи еквивалентни трансформации. Ако е можно двете страни да ги трансформираме до исти израз. Потоа заклучуваме дека даденото равенство е идентитет.

➤ **Пример 3.** Да го докажеме идентитетот: $\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \left(\operatorname{ctg}^2 \alpha \right)^2$.

$$\begin{aligned}\text{Решение. Имаме } \frac{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1} &= \frac{\left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2}{\left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)} \Leftrightarrow \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \left(\frac{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \blacksquare\end{aligned}$$

3. Тргнеме од некој познат идентитет и со идентични алгебарски трансформации и со основните формули се обидуваме да го добиеме даденото равенство.

➤ **Пример 4.** Да го докажеме идентитетот: $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.

Решение. Ако во идентитетот (1): $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, ги степенуваме двете страни добиваме $\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$. Ако на двете страни на равенството го одземеме изразот $2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ го добиваме дадениот идентитет

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \blacksquare$$

➤ **Пример 5.** Да го упрости́ме изразо́т: $A = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{2(1 + \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

Решение. Имаме:

$$A = \frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - 2 - 2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} = \frac{-(1 - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = -1 \blacksquare$$

ЗАДАЧИ.

Упрости ги изразите (1-5) водејќи сметка за допуштените вредности на аргументот во нив:

1. $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha$;
2. $\frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\cos \alpha}$;
3. $\frac{1 + \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$;
4. $\operatorname{ctg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$;
5. $\frac{1 + \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1 - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$

Докажи ги идентитетите (6-15) водејќи сметка за допуштените вредности на аголот α :

6. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$;
7. $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$;
8. $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$;
9. $\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \cdot \sin^2 \cos^2 \alpha = 1$;
10. $\operatorname{ctg} \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \cos \alpha$;
11. $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \sin^2 \alpha$;
12. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 - 2 \sin^2 \alpha$;
13. $\sin^3 \alpha \cdot (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$
14. $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha)} = \sin \alpha - \cos \alpha$;
15. $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = 2 \operatorname{tg} \alpha$
16. $\cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha + 2)(2 \operatorname{tg} \alpha + 1) - 5 \sin \alpha \cos \alpha = 2$;
17. $\frac{2}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha}$

2.1.7. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ВРЕДНОСТА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ СПОРЕД ВРЕДНОСТА НА ЕДНА ОД НИВ

Со помош на основните тригонометриски зависности (идентитети) можеме секоја од тригонометриските функции да ја изразиме преку другите. Тоа ни овозможува да ја пресметаме вредноста на тригонометриски функции од даден агол, ако е позната вредноста на една тригонометриска функција од тој агол. Ќе го прикажеме ова низ неколку примери.

➤ **Пример 1.** Дадено е $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Да ги о́преде́лиме вредно́сти́те на прости́анати́ите тригонометриски функции од аголот α .

Решение. Од основниот идентитет $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, наоѓаме

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

(1)

Заменувајќи го $\cos \alpha$ од (1) во идентитетите (2) и (3) од точката 2.6. наоѓаме:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}} \quad (2)$$

При пресметувања со помош на формулите (1) и (2), од двата можни знака, плус или минус, избираме еден во зависност од тоа во кој квадрант е аголот. Во нашиов пример. бидејќи аголот α е во II квадрант, во кој косинусот, тангенсот и котангенсот имаат негативни вредности, за зададената вредност $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, во формулите (1) и (2) ќе земеме

знак “-”. Така пресметуваме. $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{-\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{-\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \blacksquare$$

➤ **Пример 2.** Дадено е $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, за $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Да ги определиме вредностите на $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

Решение. Како и во претходниот пример, од основните идентитети (1), (2) и (3) во 2.6. наоѓаме:

$$\boxed{\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}} \quad (3)$$

Аголот α е во третиот квадрант во кој $\sin \alpha$ е негативен, а $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ се позитивни. Затоа во формулите (3) ќе земеме знак “-” пред корените и пресметуваме:

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{-\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \blacksquare$$

➤ **Пример 3.** Ако $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ и $\sin \alpha < 0$, да ги определиме вредностите на $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

Решение. Бидејќи $\operatorname{tg} \alpha < 0$ во II и IV квадрант, а $\sin \alpha < 0$ во III и IV квадрант, следува аголот α да е во IV квадрант. Од формулата (6) во 2.6. наоѓаме $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{-\frac{5}{12}} = -\frac{12}{5}$.

Од формулите (11) и (8) во 2.6. следува:

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}} \quad (4)$$

Бидејќи според условот $\sin \alpha < 0$, имаме: $\sin \alpha = \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{-\frac{5}{12}}{\sqrt{1 + \frac{25}{144}}} = \frac{-\frac{5}{12}}{\sqrt{\frac{169}{144}}} = \frac{-\frac{5}{12}}{\frac{13}{12}} = -\frac{5}{13}$

а во IV квадрант $\cos \alpha > 0$, па имаме $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{25}{144}}} = \frac{1}{\frac{13}{12}} = \frac{12}{13}$ ■

➤ **Пример 4.** Дали може синусот и косинусот од еден ист агол α да бидат еднакви на: а) $\frac{12}{13}$ и $-\frac{5}{13}$; б) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{2}{3}$.

Решение. а) За произволен агол α треба да е исполнет основниот идентитет $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, па тој треба да важи и за овој агол α , за кој според условот имаме $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ и $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Бидејќи $\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{169}{169} = 1$, следува дека броевите $\frac{12}{13}$ и $-\frac{5}{13}$ може да бидат вредности на синусот и косинусот од еден ист агол.

б) За $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, од основниот идентитет добиваме: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \neq 1$.

Следува, дадените броеви не можат да бидат вредности на синусот и косинусот од еден ист агол α ■

ЗАДАЧИ

1. Ако е позната вредноста на една од тригонометриските функции од даден агол внеси ги во табелата десно зависностите со преостанатите тригонометриски функции.

дадена →	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\text{tg } \alpha$	$\text{ctg } \alpha$
$\sin \alpha$	/	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$		
$\cos \alpha$		/		
$\text{tg } \alpha$			/	$\frac{1}{\text{ctg } \alpha}$
$\text{ctg } \alpha$				/

2. Дадено е $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Определи ги вредностите на преостанатите тригонометриски функции.

3. Дадено е $\text{ctg } \alpha = \frac{24}{7}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Определи ги вредностите на останатите тригонометриски функции.

4. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \text{ ако е } \text{ctg } \alpha = \frac{7}{9}.$$

6. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{8 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{6 \text{tg } \alpha - 5 \text{ctg } \alpha}, \text{ ако } \text{tg } \alpha = -\frac{5}{12} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

8. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}$, ако $\text{tg } \alpha = 2$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

9. Најди ги $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ ако: $3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha = 5$.

5. Докажи го равенството:

$$\frac{3 \cos \alpha + \sin \alpha}{3 \text{ctg } \alpha - 4 \text{tg } \alpha} = 3, \text{ ако } \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ и } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

7. Изрази го преку $\text{tg } \alpha$ изразот $\frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

2.1.8. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ

1. Периодичност на тригонометриските функции. Важно својство на тригонометриските функции е својството на периодичност.

Дефиниција 1. Функцијата $y=f(x)$ дефинирана на множеството D е периодична ако постои реален број $T \neq 0$ такаков што

$$1^\circ \text{ за секој } x \in D \text{ и } x \pm T \in D :$$

$$2^\circ f(x \pm T) = f(x). \quad (1)$$

Бројот T кој ги задоволува условите 1° и 2° го викаме период на функцијата.

Теорема 1. Ако T е период на функцијата $f(x)$, тогаш и броевите од обликот $kT, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ се периоди на $f(x)$.

Доказ. Нека $T > 0$ е период за $f(x)$, односно $f(x+T) = f(x)$. Тогаш

$$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x), \forall x \in D.$$

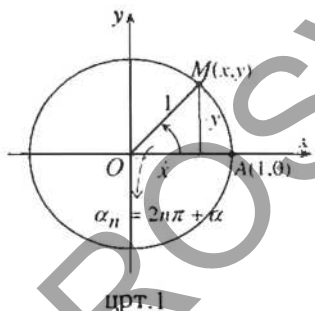
од каде следува дека $2T$ е период за $f(x)$. Исто така

$$f(x-2T) = f((x-T)-T) = f(x-T) = f(x), \forall x \in D.$$

што значи дека и $-2T$ е период за $f(x)$. Аналогно, со повеќекратна примена на (1) се покажува дека и $\pm 3T, \pm 4T, \dots, kT$ ($k \in \mathbb{Z}$) се периоди за $f(x)$, што сакавме да докажеме ♦

Најмалиот позитивен број што го има својството (1) го викаме **основен период** за $f(x)$.

Теорема 2. Тригонометриските функции синус, косинус, тангенс и котангенс се периодични со општи период $2n\pi$ ($n \cdot 360^\circ$). Основен период за $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ е 2π (360°), а за $\tan \alpha$ и $\cot \alpha$ е π (180°).



црт.1

Доказ. Во точката 2.1. видовме дека аглиите $\alpha_n = \alpha + n \cdot 360^\circ$, каде $0 \leq \alpha < 360^\circ$ и $n \in \mathbb{Z}$, имаат заеднички почетен крак OA и заеднички краен крак OM (црт.1). Тогаш, според дефиницијата на синусот и косинусот, имаме:

$$\sin(\alpha + n \cdot 360^\circ) = y = \sin \alpha \quad (2)$$

$$\cos(\alpha + n \cdot 360^\circ) = x = \cos \alpha. \quad (3)$$

или во радијанска мера

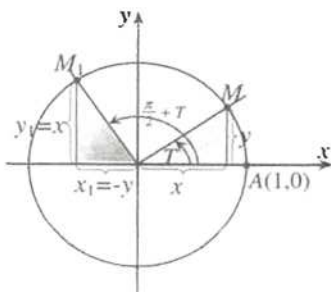
$$\sin(\alpha + 2n\pi) = y = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2n\pi) = x = \cos \alpha$$

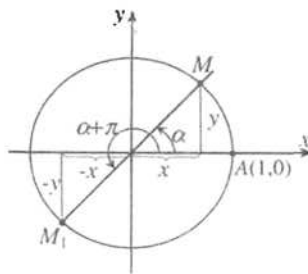
Да покажеме дека основен период за $\sin \alpha$ е 2π . Да претпоставиме дека постои друг број T , $0 < T < 2\pi$, за кој важи равенството $\sin(\alpha + T) = \sin \alpha$.

Бидејќи последното равенство треба да важи за било кој агол, да го земеме на пример аголот $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Тогаш, од (1) следува: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Од друга страна, според црт.2: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \cos T$, па следува $\cos T = 1$, а тоа е можно само за $T = 0$ или $T = 2\pi$, што е спротивно на претпоставката $0 < T < 2\pi$.

Аналогно се докажува дека основен период за косинусот е 2π . Обиди се да докажеш сам.



црт.2



црт.3

Со аналогни разгледувања, според црт.3, добиваме дека и функциите тангенс и котангенс се периодични функции и за нив важи:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) &= \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) &= \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \right\}, k \in \mathbb{Z} \quad \blacklozenge \quad (4)$$

➤ **Пример 1.** Да покажеме дека $\sin 420^\circ = \sin 780^\circ = \sin(-1020^\circ)$.

Решение. Од формулата (2) имаме: $\sin 420^\circ = \sin(60^\circ + 360^\circ) = \sin 60^\circ$, $\sin 780^\circ = \sin(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \sin 60^\circ$ и $\sin(-1020^\circ) = \sin(60^\circ - 3 \cdot 360^\circ) = \sin 60^\circ$, од каде следува даденото равенство ■

➤ **Пример 2.** Да покажеме дека $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \operatorname{tg} \frac{13\pi}{12} = \operatorname{tg} \frac{37\pi}{12} = \operatorname{tg} \left(-\frac{35\pi}{12} \right)$.

Решение. Бидејќи $\frac{13\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \pi$, $\frac{37\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + 3\pi$, $-\frac{35\pi}{12} = \frac{\pi}{12} - 3\pi$, од формулите (4) имаме: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{12} + \pi \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{12} + 3\pi \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{12} - 3\pi \right)$ ■

➤ **Пример 3.** Да провериме дали е точно равенството $\operatorname{ctg} 330^\circ = \operatorname{ctg} 1830^\circ$.

Решение. Бидејќи $330^\circ = 30^\circ - 1 \cdot 360^\circ$, $1830^\circ = 30^\circ + 5 \cdot 360^\circ$, поради периодичноста на котангенсот имаме: $\operatorname{ctg} 330^\circ = \operatorname{ctg}(30^\circ - 360^\circ) = \operatorname{ctg}(30^\circ + 5 \cdot 360^\circ) = \operatorname{ctg} 1830^\circ$ ■

2. Парност и непарност на тригонометриските функции.

Дефиниција 2. За множеството $D \subseteq \mathbb{R}$ велиме дека е симетрично множество ако за секое $x \in D$ и $-x \in D$.

Дефиниција 3. Ако $f(x)$ е функција определена на симетричното множество D и за секое $x \in D$ важи:

1° $f(-x) = f(x)$, тогаш $f(x)$ е парна функција;

2° $f(-x) = -f(x)$, тогаш $f(x)$ е непарна функција.

Ако $f(x)$ не исполнува ниту еден од горните услови, таа е **нишџу ѓарна нишџу неѓарна**.

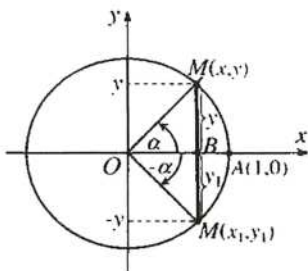
На пример, квадратната функција $f(x) = x^2$, што ја изучи претходната учебна година, е парна функција, а линеарната функција $f(x) = ax$ е непарна функција.

Теорема. Косинусот е ѓарна функција, т.е.

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

а синусот, тангенсот и котангенсот се неѓарни функции, т.е.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$



црт.4

Доказ. Точките $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$ од тригонометриската кружница (црт.4), што ги определуваат заемно спротивните агли α и $-\alpha$ се симетрични во однос на Ox -оската и имаат исти апсциси, т.е. $x = x_1 = OB$, и заемно спротивни ординати $y_1 = -y$, од каде следува:

$$\cos(-\alpha) = x_1 = x = \cos \alpha, \quad (1)$$

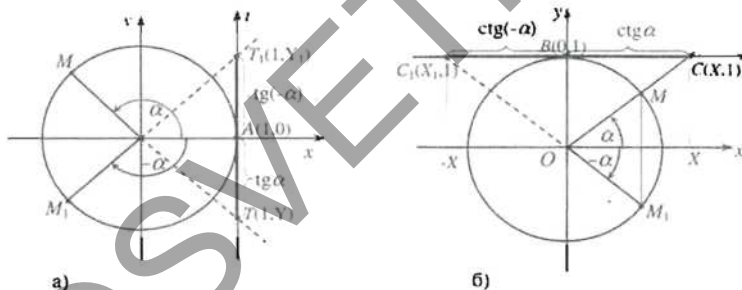
$$\sin(-\alpha) = y_1 = -y = -\sin \alpha. \quad (2)$$

За функцијата $\operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, според црт.5а, добиваме:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = Y_1 = -Y = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Аналогно за $\operatorname{ctg} \alpha$, $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, според црт.5б, имаме:

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = X_1 = -X = -\operatorname{ctg} \alpha \quad \blacklozenge$$



црт.5

➤ **Пример 4.** Да докажеме дека функцијата $f(x) = x \cdot \sin x$ е ѓарна функција.

Решение. Бидејќи $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin x) = x \cdot \sin x = f(x)$, според дефиницијата 2°, дадената функција е парна. ■

➤ **Пример 5.** Да ја испитаме ѓарноста на функцијата $f(x) = \frac{1 + \cos x}{x}$.

Решение. Имаме: $f(-x) = \frac{1 + \cos(-x)}{(-x)} = -\frac{1 + \cos x}{x} = -f(x)$. Бидејќи $f(-x) = -f(x)$, заклучуваме дека дадената функција е непарна. ■

➤ **Пример 6.** Да докажеме дека функцијата $f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ не е ниту парна, ниту непарна.

Решение. Имаме: $f(-x) = \frac{1 - \operatorname{tg}(-x)}{1 + \operatorname{tg}(-x)} = \frac{1 - (-\operatorname{tg} x)}{1 + (-\operatorname{tg} x)} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$ и $-f(x) = -\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$.

Значи $f(-x) \neq -f(x)$, но и $f(-x) \neq f(x)$, т.е. дадената функција ниту е парна, ниту непарна ■

3. Монотоност на тригонометриските функции. Ова е едно од важните својства на функциите, што вообичаено го испитуваме при нивното изучување, со кое се запозна и при разгледување на експоненцијалната и логаритамската функција.

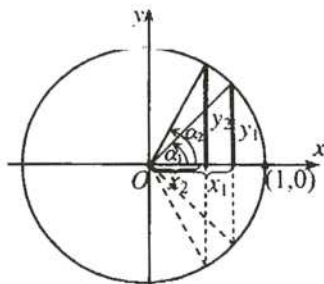
Теорема 1. На интервалот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ синусот монотонно расте од 0 до 1, а косинусот монотонно опаѓа од 1 до 0.

Доказ. Треба да докажеме: ако $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin \alpha_1 < \sin \alpha_2 \leq 1 \\ 1 \geq \cos \alpha_1 > \cos \alpha_2 \geq 0 \end{cases}$

Ќе ги докажеме овие неравенства со помош на следниве тврдења од геометријата:

1° на поголем централен агол во кружница одговара поголема тетива;

2° од две тетиви во кружница поголемата е поблиску до центарот.



црт.6

Според црт.6, $y_1 = \sin \alpha_1$, $y_2 = \sin \alpha_2$, од каде $2y_1 = 2 \sin \alpha_1$, $2y_2 = 2 \sin \alpha_2$. Бидејќи $2y_1$ и $2y_2$ се должини на тетивите што одговараат на централните агли $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$, согласно со тврдењето 1°, важат импликациите $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow 2\alpha_1 < 2\alpha_2 \Rightarrow 2y_1 < 2y_2 \Rightarrow 2 \sin \alpha_1 < 2 \sin \alpha_2$, т.е. $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$, а поради $\sin 0 = 0$ и $\sin \frac{\pi}{2} = 1$,

следува дека на интервалот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ синусот монотонно расте од 0 до 1. Исто така, бидејќи $x_1 = \cos \alpha_1$, $x_2 = \cos \alpha_2$, согласно со

тврдењето 2° имаме:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow 2\alpha_1 < 2\alpha_2 \Rightarrow x_1 > x_2 \Rightarrow \cos \alpha_1 > \cos \alpha_2, \text{ и } \cos 0 = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

од каде следува дека на интервалот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ косинусот монотонно опаѓа од 1 до 0 ♦

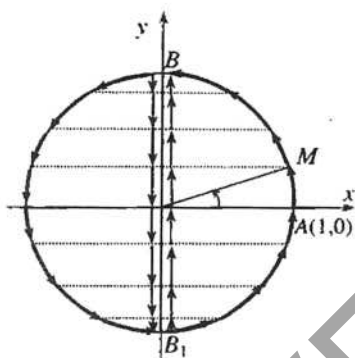
Монотоноста на синусот и косинусот во преостанатите три квадранти ја утврдуваме на сличен начин. Тоа можеме да го илустрираме, на пример, со цртежите 7 и 8. Така на пример, од црт.7 гледаме дека кога вториот крак на аголот ротира во “+” насока, опишувајќи агли во II и III квадрант, точката М ја опишува левата полукружница, а нејзината проекција на у-оската го опишува вертикалниот дијаметар BB_1 од горе надолу, т.е. $y = \sin \alpha$ опаѓа од 1 до -1. Кога вториот крак на аголот ги опишува аглите од десната полурамнина, т.е. точката М ја опишува десната полукружница (IV и I квадрант), нејзината

проекција го опишува вертикалниот дијаметар B_1B оддолу нагоре, т.е. $y = \sin \alpha$ расте од -1 до 1 . Значи, функцијата $\sin \alpha$ расте во интервалите $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ кои може да ги запишеме со еден интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а монотono опаѓа на интервалот $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

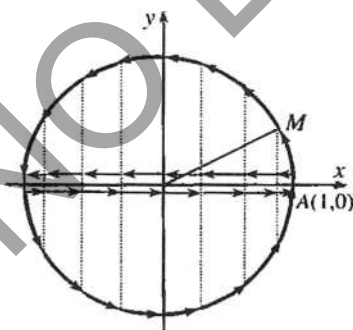
Поради периодичноста на $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, важат тврдењата што следат подолу.

Теорема 5. Функцијата $\sin \alpha$ монотono расте од -1 до 1 на секој интервал $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, а монотono опаѓа од 1 до -1 на секој од интервалиите $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 6. Функцијата $\cos \alpha$ монотono опаѓа од 1 до -1 на секој интервал $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, а монотono расте од -1 до 1 на секој од интервалиите $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.



црт.7



црт.8

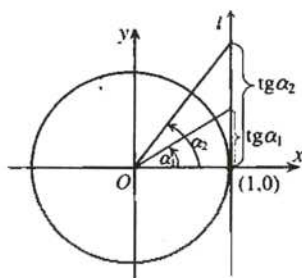
Теорема 7. Во интервалот $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функцијата тангенс монотono расте, а функцијата котангенс монотono опаѓа.

Доказ. Нека $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$. Од $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$ и $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2$ т.е. $\frac{1}{\cos \alpha_1} < \frac{1}{\cos \alpha_2}$, следува $\frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} < \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2}$ односно $\operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2$, што значи дека тангенсот расте во $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Исто така, од $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$ т.е. $\frac{1}{\sin \alpha_1} > \frac{1}{\sin \alpha_2}$ и $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2$ следува $\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} > \frac{\cos \alpha_2}{\sin \alpha_2}$ односно $\operatorname{ctg} \alpha_1 > \operatorname{ctg} \alpha_2$, што значи котангенсот опаѓа во I квадрант, т.е. во интервалот $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ова тврдење можеме да го докажеме и по геометриски пат. Според црт.9, и тврдењето: “на поголем агол во триаголник одговара поголема синусана” имаме:

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow Y_1 < Y_2 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2$$



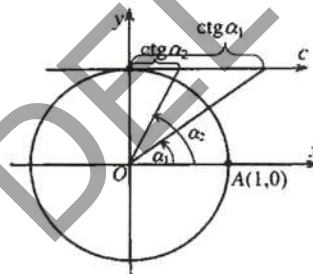
црт.9

Слично, со помош на црт.10, по геометриски пат, покажуваме дека котангенсот опаѓа во интервалот $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ♦

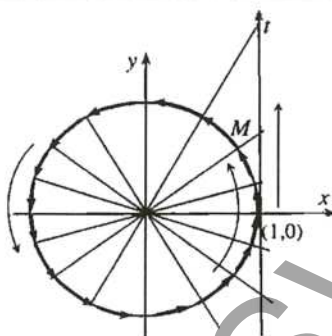
Со помош на цртежите 11 и 12 можеме да ги согледаме и тврдењата:

Теорема 8. Функцијата $\operatorname{tg} \alpha$ монотонно расте од $-\infty$ до $+\infty$ на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а поради периодичноста и на секој интервал $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

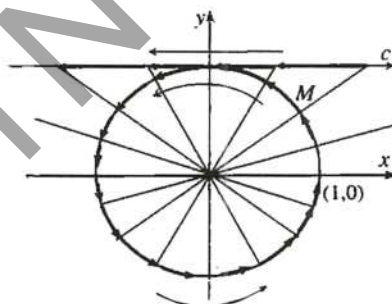
Теорема 9. Функцијата $\operatorname{ctg} \alpha$ монотонно опаѓа од $+\infty$ до $-\infty$ на интервалот $(0, \pi)$ а поради периодичноста и на секој интервал $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.



црт.10



црт.11



црт.12

► **Пример 7.** Без да ги пресметуваме вредностите, да ги споредиме по големина броевите: а) $\sin 190^\circ$ и $\sin 255^\circ$; б) $\cos 275^\circ$ и $\cos 1000^\circ$; в) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$ и $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$; г) $\operatorname{ctg}(-230^\circ)$ и $\operatorname{ctg}(-265^\circ)$.

Решение. а) Бидејќи $190^\circ, 225^\circ \in (180^\circ, 270^\circ)$ и $190^\circ < 225^\circ$, а синусот опаѓа во III квадрант, следува $\sin 190^\circ > \sin 255^\circ$.

б) агли од 275° и $1000^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 280^\circ$ се во IV квадрант во кој косинусот расте, па од $275^\circ < 280^\circ$, следува $\cos 275^\circ < \cos 1000^\circ$.

в) бидејќи $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ и $\frac{3\pi}{4} < \frac{5\pi}{6}$, а тангенсот расте, следува $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} < \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$.

г) $-265^\circ, -230^\circ$ се агли од II квадрант во кој котангенсот опаѓа, па од $-265^\circ < -230^\circ$ следува $\operatorname{ctg}(-265^\circ) > \operatorname{ctg}(-230^\circ)$ ■

ЗАДАЧИ

1. Користејќи ја периодичноста на тригонометриските функции докажи дека:

а) $\cos 480^\circ = \cos 120^\circ$; б) $\sin \frac{25\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6}$; в) $\operatorname{tg}(-860^\circ) = \operatorname{tg} 40^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 2525^\circ = \operatorname{ctg} 5^\circ$

д) $\cos \frac{13\pi}{6} = \cos \frac{25\pi}{6} = \cos(-\frac{23\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6}$

2. Провери дали е периодична функцијата: а) $y = 1 - \sin x$; б) $y = 2 + \operatorname{ctg} x$; в) $y = 3 + \cos x$.

3. Кои од следните функции се парни, кои се непарни, а кои се ниту парни ниту непарни:

а) $y = x^2 + \cos x$; б) $y = 5 - \sin x$; в) $y = \operatorname{tg}|x|$; г) $y = x^3 + \operatorname{tg} x$; д) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \cos x$; е) $y = \operatorname{ctg} x + \cos x$.

4. Докажи дека производ од:

- а) две парни функции е парна функција;
- б) две непарни функции е парна функција;
- в) една парна и една непарна функција е непарна функција.

5. Без да ги пресметуваш вредностите подреди ги по големина броевите:

а) $\sin 235^\circ, \sin 18^\circ, \sin 359^\circ, \sin 133^\circ$; б) $\cos \frac{3\pi}{4}, \cos \frac{7\pi}{6}, \cos 0, \cos \frac{11\pi}{12}$; в) $\operatorname{tg} 0^\circ, \operatorname{tg} 277^\circ, \operatorname{tg} 14^\circ, \operatorname{tg} 120^\circ$;

г) $\operatorname{ctg} 24^\circ, \operatorname{ctg} 215^\circ, \operatorname{ctg} 110^\circ, \operatorname{ctg} 350^\circ$; д) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}, \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}, \operatorname{tg} 0, \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12}$

6. Без да ја пресметуваш точната вредност определи го знакот на разликата:

а) $\sin 153^\circ - \sin 73^\circ$ б) $\cos 234^\circ - \sin 33^\circ$ в) $\operatorname{tg} 74^\circ - \operatorname{tg} 174^\circ$

г) $\operatorname{ctg} 37^\circ - \operatorname{ctg} 301^\circ$ д) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}$ е) $\cos \frac{7\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{4}$

7. Без да ја пресметуваш вредноста одреди го знакот на количникот:

а) $\frac{\operatorname{tg} 254^\circ - \operatorname{tg} 285^\circ}{\sin 213^\circ - \sin 217^\circ}$; б) $\frac{\cos 27^\circ - \cos 23^\circ}{\operatorname{ctg} 328^\circ - \operatorname{ctg} 341^\circ}$; в) $\frac{\sin 190^\circ - \cos 155^\circ}{\operatorname{tg} 118^\circ - \operatorname{ctg} 138^\circ}$

2.1.9. СВЕДУВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ

Видовме дека произволен ориентиран агол можеме да го претставиме во вид:

$$\alpha + k \cdot 360^\circ (\alpha + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}, \text{ а } \alpha \text{ е елементарен агол.} \quad (1)$$

Бидејќи тригонометриските функции се периодични функции, пресметувањето на нивните вредности за произволен агол се сведува на пресметување на тригонометриските функции од елементарни агли.

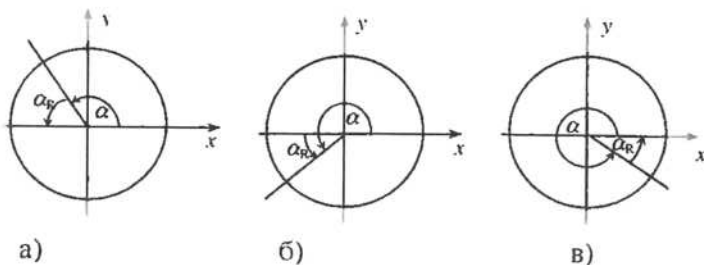
Сега ќе видиме како тригонометриските функции од произволен елементарен агол ги изразуваме со тригонометриска функција од позитивен остар агол. Ова ќе ни овозможи да ги пресметуваме вредностите на тригонометриските функции од кој и да е агол знаејќи ги само нивните вредности за позитивните остри агли.

Нека α е агол во стандардна положба, но не е квадрантен агол.

Дефиниција. Позитивниот остар агол α_R за кој е опклонет аголот α од x -оската го викаме **референтен агол** за аголот α .

Согласно со дефиницијата, произволен елементарен агол α можеме да го запишеме во вид:

$$180^\circ - \alpha_R \quad (\pi - \alpha_R) \text{ (црт.1а)} ; 180^\circ + \alpha_R \quad (\pi + \alpha_R) \text{ (црт.1б)} \text{ или } 360^\circ - \alpha_R \quad (2\pi - \alpha_R) \text{ (црт.1в)}.$$



црт.1

в) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$ е агол во IV квадрант и $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$, следува $\alpha_R = \frac{\pi}{3}$ (црт.1в) ■

➤ **Пример 1.** Да ги најдеме референцијниите агли за аглиите:

а) $\alpha = 150^\circ$; б) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; в) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$.

Решение. а) Бидејќи

$$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ,$$

следува $\alpha_R = 30^\circ$ (црт.1а);

б) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ е агол во III квадрант и

$$\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}, \text{ па } \alpha_R = \frac{\pi}{6} \text{ (црт.1б);}$$

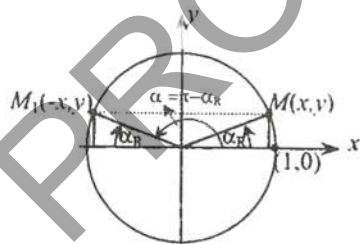
➤ **Пример 2.** Да ги определиме вредностите на тригонометричките функции за аглиите: а) $\sin 160^\circ$; б) $\cos 200^\circ$; в) $\lg 340^\circ$

Решение. а) $\alpha = 160^\circ$ е агол во II квадрант и $160^\circ = 180^\circ - 20^\circ$, па $\alpha_R = 20^\circ$. Крајните краци за аглите од 20° и 160° се симетрични во однос на y-оската и ја сечат тригонометричката кружница во точките $M(x, y)$ и $M_1(-x, y)$ кои се симетрични во однос на y-оската (црт.2), од каде следува:

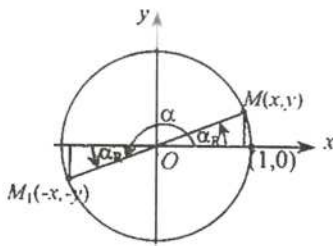
$$\sin 160^\circ = y = \sin 20^\circ \text{ т.е. } \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ.$$

б) Бидејќи $\alpha = 200^\circ = 180^\circ + 20^\circ$, следува $\alpha_R = 20^\circ$. Крајните краци на α и α_R ја сечат кружницата во точките $M(x, y)$ и $M_1(-x, -y)$ кои се симетрични во однос на координатниот почеток (црт.3), па имаме: $\cos 200^\circ = -x = -\cos 20^\circ$ т.е. $\cos(180^\circ + 20^\circ) = -\cos 20^\circ$.

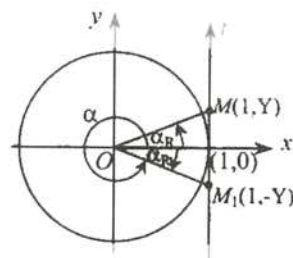
в) Со слични разгледувања како под а) и б), со помош на црт.4, добиваме $\lg 340^\circ = \lg(360^\circ - 20^\circ) = -Y = -\lg 20^\circ$ ■



црт.2



црт.3



црт.4

Резултатите од примерот 1 важат и за случај на произволни агли. Ако α е произволен агол од видот

$$\alpha = 180^\circ \pm \alpha_R \quad (\pi \pm \alpha_R) \quad \text{или} \quad \alpha = 360^\circ \pm \alpha_R \quad (2\pi \pm \alpha_R)$$

тогаш важат следниве **формули за сведување**:

$$\sin \alpha = \pm \sin \alpha_R; \quad \cos \alpha = \pm \cos \alpha_R; \quad \operatorname{tg} \alpha = \pm \operatorname{tg} \alpha_R; \quad (1)$$

Изборот на знакот, “+” или “-”, зависи од тоа во кој квадрант е аголот α и каков е знакот на соодветната функција во тој квадрант.

Тврдењето искажано со формулите (1) претставува **I правило за сведување на вредностите на тригонометриските функции од произволен агол на остар агол** и искажано со зборови гласи:

Вредносниите на тригонометриските функции од произволен агол α се еднакви на вредносниите на истоимените тригонометриски функции од соодветниот референентен агол α_R , земено со знак “+” или “-” согласно со тоа во кој квадрант е аголот α и каков е знакот на функцијата во тој квадрант.

агол ф-ја	$\pi - \alpha$ $180^\circ - \alpha$	$\pi + \alpha$ $180^\circ + \alpha$	$2\pi - \alpha$ $360^\circ - \alpha$	$2\pi + \alpha$ $360^\circ + \alpha$
sin	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

За полесно користење, формулите за сведување, искажани со равенствата (1), ги внесуваме во таблица (таблица 1).

Таблица 1

► **Пример 3.** Со помош на правилото за сведување да ги определиме вредносниите на

$$\text{а) } \alpha = -300^\circ, \quad \text{б) } \alpha = \frac{21\pi}{4}.$$

Решение. а) Поради непарноста на синусот: $\sin(-300^\circ) = -\sin 300^\circ$ и $300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$, па согласно со правилото за сведување имаме: $\sin(-300^\circ) = -\sin(360^\circ - 60^\circ) = -(-\sin 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

На сличен начин: $\cos(-300^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(-300^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}(-300^\circ) = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Имаме $\frac{21\pi}{4} = \frac{16\pi + 5\pi}{4} = 4\pi + \frac{5\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$, т.е. $\alpha_R = \frac{\pi}{4}$. Бидејќи $\alpha = \frac{21\pi}{4}$ е агол од III квадрант, во кој $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ се позитивни броеви, а $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ се негативни броеви според формулите за сведување добиваме:

$$\sin \frac{21\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \frac{21\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{21\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1; \quad \operatorname{ctg} \frac{21\pi}{4} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1 \quad \blacksquare$$

► **Пример 4.** Со помош на правилото за сведување и таблицата 1, да составиме таблица за вредностите на тригонометриските функции од агли чиј референтен агол е 30° .

Решение: Ако во таблицата 1 ставиме $\alpha = 30^\circ$ ќе ја добиеме таблицата за вредности на тригонометриските функции од аглите од 150° , 210° , 330° , 390° (таблица 2)

агол Ф-ја	150° $180^\circ - 30^\circ$	210° $80^\circ + 30^\circ$	330° $360^\circ - 30^\circ$	390° $360^\circ + 30^\circ$
sin	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
ctg	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

Таблица 2

Покрај формулите за сведување (1), често пати е практично вредноста на тригонометриските функции од даден агол да ја изразиме преку нејзината вредност од остриот агол α за кој дадениот агол е отклонет од ординатната оска. Тоа се агли од видот:

$$90^\circ \pm \alpha \left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha \right) \text{ или } 270^\circ \pm \alpha \left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha \right). \quad (3)$$

За тригонометриските функции од аглите од видот (3) важат формулите внесени во таблицата 3, кои ги добиваме врз основа на правилото, познато како

агол Ф-ја	$\frac{\pi}{2} - \alpha$ $90^\circ - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$ $90^\circ + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$ $270^\circ - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$ $270^\circ + \alpha$
sin	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
cos	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
tg	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
ctg	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

Таблица 3

II правило за сведување. Вредностите на тригонометриските функции од произволен агол, отклонет од ординатната оска за остар агол α , се еднакви на вредностите на нивните кофункции од остриот агол α , земени со знак "+" или "-" согласно со тоа во кој квадрант е аголот и каков е знакот на функцијата во тој квадрант..

► **Пример 5.** Со помош на формулите за сведување од таблица 3, да ги определиме вредностите: а) $\sin 120^\circ$; б) $\cos 225^\circ$; в) $\operatorname{tg} 315^\circ$.

Решение. Имаме: а) $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\operatorname{tg} 315^\circ = \operatorname{tg}(270^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$ ■

► **Пример 6.** Без да ја пресметуваме точната вредност да го определиме знакот на $\cos 135^\circ - \sin 152^\circ$

Решение. Од $\sin 152^\circ = \sin(90^\circ + 62^\circ) = \cos 62^\circ$ и $\cos 135^\circ - \sin 152^\circ = \cos 135^\circ - \cos 62^\circ$, бидејќи $62^\circ, 135^\circ \in (0^\circ, 180^\circ)$ и $62^\circ < 135^\circ$, а косинусот опаѓа, следува $\cos 62^\circ > \cos 135^\circ$, од каде добиваме $\cos 135^\circ - \sin 152^\circ = \cos 135^\circ - \cos 62^\circ < 0$ ■

ЗАДАЧИ

1. Определи ја вредноста на тригонометриските функции за аглие: а) 150° ; б) $\frac{7\pi}{6}$; в) 315° .

2. Докомпетирај ја таблицата

агол φ-ја	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
sin		$\frac{\sqrt{2}}{2}$			$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
tg	-1				
ctg			1		

Пресметај ја вредноста на изразите (3-5):

3. $2 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - 2 \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6}$

4. $\sin 150^\circ + \cos 225^\circ - \operatorname{tg} 300^\circ + \operatorname{ctg} 405^\circ$

5. $2 \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} - 3 \cos \frac{7\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}(-\frac{2\pi}{3})$

Упрости ги изразите (6-10) ($0 < \alpha < 90^\circ$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)):

6. $\sin(90^\circ + \alpha) + \cos(180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$

7. $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha - \pi) - \cos(\alpha - \frac{3\pi}{2}) + \cos(\alpha - 2\pi)$

8. $\frac{\sin(360^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha)}{\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)}$

9. $\frac{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha)} \cdot \frac{\cos(2\pi - \alpha)}{\sin(-\alpha)} \cdot \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)}$

10. $\frac{\sin(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\alpha - 180^\circ)} \cdot \frac{\cos(-\alpha)}{\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)} \cdot \frac{\cos(360^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ + \alpha)}$

Докажи ги идентитетите (11-15); ($0 < \alpha < 90^\circ$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)):

11. $\sin(\alpha - \pi) + \operatorname{tg}(\alpha - \pi) + \cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

12. $\frac{\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) \cdot \cos(270^\circ - \alpha) \cdot \cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(270^\circ - \alpha)} = \sin \alpha$

13. $\frac{\cos(\pi - \alpha) + \sin(\pi + \alpha)}{1 + \operatorname{tg}(2\pi + \alpha)} = -\cos \alpha$

14. $\frac{\cos(180^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)}{\cos(270^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha$

15. $\frac{\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)} \cdot \frac{\cos(360^\circ - \alpha)}{\sin(-\alpha)} \cdot \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)} = \sin \alpha$

РЕГИОМОНТАНУС, попознат како **ЈОХАН МИЛЕР** (Müller Johannes) (1436-1476) - германски математичар и астроном познат по делото *За триаголниците*. Заслужен е за пренесувањето на старогрчките и арапските сознанија во математиката. Тој е оригинален по начинот на изложување на содржините од математиката и се смета за зачетник на западната тригонометрија.

2.2. ГРАФИК НА ТРИГОНОМЕТРИСКА ФУНКЦИЈА

До тука тригонометриските функции ги разгледуваме како функции од агли, мерени во степени или радијани. Бидејќи на секој централен агол одговара кружен лак зафатен од краците на аголот, тригонометриските функции можеме да ги разгледуваме и како функции од кружни лакови. Меѓутоа, во математиката и различни други области, се јавуваат проблеми во кои се среќаваме со тригонометриски функции од броен аргумент кој не мора да има некое конкретно геометриско значење (агол, лак) но може да претставува големина од различна природа, како на пример, време, температура, и друго. Одтаму и потребата да дефинираме и испитуваме тригонометриски функции од аргумент реален број.

Дефиниција. Ако t е реален број, постои $\sin t = \sin \alpha$, каде α е агол чија мера е t радијани.

Аналогно, функциите $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ ги определуваме како вредности на соодветните тригонометриски функции од аголот α со мера t радијани.

На пример, симболот $\sin 2$ претставува вредност на синусот од агол чија радијанска мера е 2, односно $\sin 2 = \sin(2 \text{ радијани})$, $\operatorname{tg} 1.5 = \operatorname{tg}(1.5 \text{ радијани})$, итн.

Изучувањето на дадена функција има за цел да утврди на кој начин се менува функцијата кога аргументот се менува во дефиниционото множество на функцијата. Тие промени на функцијата ги викаме **тек на функцијата**, а постапката за утврдување на овие промени ја нарекуваме **испитување на функцијата**. Текот на функцијата $y = f(x)$, $x \in D$, го претставуваме со нејзиниот график $\Gamma_f = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$.

Бидејќи обично независно променливата ја означуваме со буквата x , а графикот на функцијата го претставуваме геометриски во правоаголен координатен систем xOy , затоа и сега бројниот аргумент на тригонометриските функции ќе го означиме со x . Значи, ќе ги испитуваме функциите

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x \text{ и } y = \operatorname{ctg} x.$$

2.2.1. ТЕК И ГРАФИК НА ОСНОВНИТЕ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

1. Тек и график на функцијата $y = \sin x$. Да се потсетиме на својствата на синусот што досега ги утврдивме, но сега искажани за аргумент реален број.

1° Дефиниционно множество. Функцијата $y = \sin x$ е дефинирана за произволен реален број x , т.е. $D_{\sin x} = \mathbb{R}$.

2° Множество на вредности. Бидејќи $-1 \leq \sin x \leq 1$, за секој $x \in \mathbb{R}$, множеството на вредности за функцијата $y = \sin x$ е интервалот $V_{\sin x} = [-1, 1]$.

3° Периодичност. Синусот е периодична функција, т.е. за произволен $x \in \mathbb{R}$ важи $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

Основен период е $T = 2\pi$.

4° Парност и непарност. Синусот е нејарна функција, односно важи

$$\sin(-x) = -\sin x, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}.$$

5° Нули на функцијата. $\sin x = 0$ за $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ и $x_3 = 2\pi$ на интервалот $[0, 2\pi]$, а поради периодичноста за $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) на интервалот $(-\infty, +\infty)$. Следува, графикот на функцијата ја сече x -оската во точките $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

6° Знак. $\sin x > 0$, за $x \in (0, \pi)$, а поради периодичноста и за $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;

$$\sin x < 0, \text{ за } x \in (\pi, 2\pi), \text{ односно за } x \in ((2k+1)\pi, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

7° Интервали на растење и опаѓање. Синусот моноџоно расте од -1 до 1 на интервалите $[0, \frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, а поради периодичноста и на сите интервали $[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ и $[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$); синусот моноџоно опаѓа од 1 до -1 на интервалот $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, а поради периодичноста и на секој интервал $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$).

8° Екстремни вредности. Во основниот интервал $[0, 2\pi]$, синусот го достигнува својот **максимум** $y = 1$ т.е. $\sin x = 1$ за $x = \frac{\pi}{2}$ и **минимум** $y = -1$ т.е. $\sin x = -1$ за $x = \frac{3\pi}{2}$.

На целата дефинициона област $\sin x = 1$ за $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, а $\sin x = -1$ за $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Минимумот и максимумот ги викаме **екстремни вредности** за функцијата

9° График. Поради својството на периодичност на функцијата $y = \sin x$, доволно е да го скицираме графикот на кој било интервал што го опфаќа основниот период на синусот, $T = 2\pi$. Затоа, прво ќе го скицираме графикот на $\sin x$ на интервалот $[0, 2\pi]$, а потоа и на интервалот $(-\infty, +\infty)$. Скица на графикот на функцијата можеме да направиме на два начина:

I. со помош на таблица од вредности на функцијата, и

II. геометриски, со помош на тригонометриска кружница.

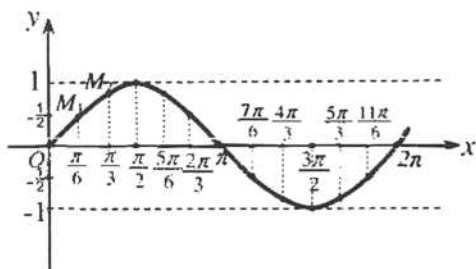
Ќе ги разгледаме и двата начина.

I начин. Составуваме таблица во која ги внесуваме **карактеристичните вредности** (нулите и екстремите) на функцијата $\sin x$ во интервалот $[0, 2\pi]$ и извесен број вредности на функцијата што ги знаеме напамет, без да користиме калкулатор, логаритамска таблица или некој друг прирачник. На пример, можеме да ја составиме следнава таблица:

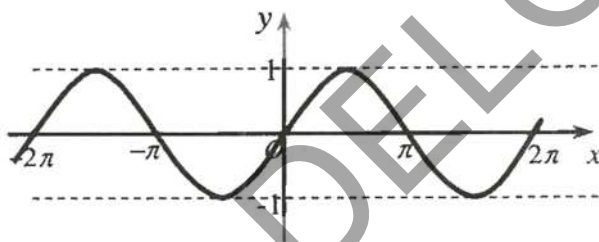
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
	нула			max			нула			min			нула

Потоа, во правоаголен координатен систем ги нанесуваме точките $O(0,0)$, $M_1(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$, $M_2(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, итн. и ги поврзуваме со глатка линија која приближно го претставува графикот на функцијата $\sin x$ на интервалот $[0, 2\pi]$ (црт.1).

Ако графикот на интервалот $[0, 2\pi]$ го пренесеме едноподруго налево и надесно на интервали со должина 2π , ќе го добиеме графикот на функцијата $\sin x$ на целиот интервал $(-\infty, +\infty)$ (црт.2).



црт.1

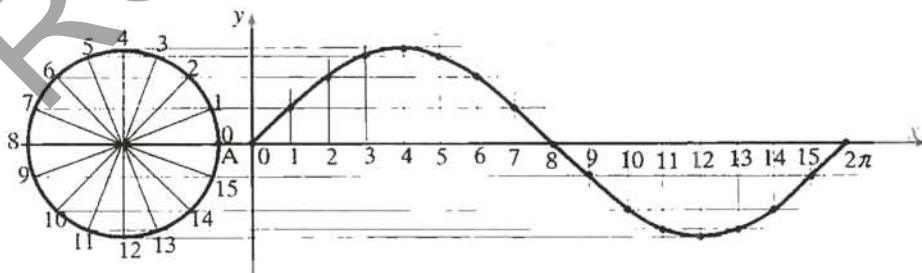


црт.2

Кривата што го претставува графикот на функцијата $y = \sin x$ на интервалот $(-\infty, +\infty)$, ја викаме **синусоида** (според името на функцијата).

II начин. Го конструираме графикот на функцијата $y = \sin x$ на интервалот $[0, 2\pi]$, со произволна точност, ползувајќи ја нејзината дефиниција во тригонометриската кружница.

За таа цел, скицираме кружница со радиус 1 (единица) и центар на x -оската, а потоа почнувајќи од точката A ја делиме кружницата на произволен број еднакви делови (на цртежот 3 тој број е 16) со точките $A=0, 1, 2, 3, 4, \dots, 16 \equiv A$, со кои се определени аглиите $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \dots, 2\pi$. Потоа на x -оската, почнувајќи од координатниот почеток O , нанесуваме отсечка чија должина е еднаква на должината на кружницата, т.е. отсечка со должина $L = 2\pi \approx 6,28$, и ја делиме исто така на 16 еднакви делови (црт.3). Понатаму, во точките 0, 1, 2, 3, ..., 16 од кружницата повлекуваме прави паралелни со x -оската, а во точките 0, 1, 2, 3, ..., 16 на x -оската издигнуваме нормали. Пресечните точки на соодветните паралелни и нормални прави, се точки од графикот на функцијата (зошто?), кои ги



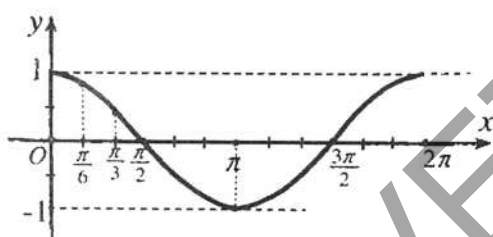
црт.5

поврзуваме со глатка линија и така го добиваме графикот на функцијата $y = \sin x$, на интервалот $[0, 2\pi]$ (црт.3).

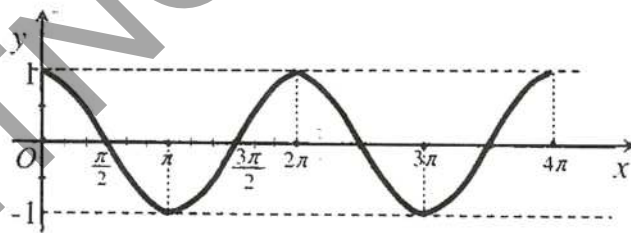
2. Тек и график на функцијата $y = \cos x$. Графикот на косинусната функција можеме да го конструираме (скицираме) на сличен начин како и графикот на синусната функција. Еден начин е со составување на таблица:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
	max			нула			min			нула			max

Ако паровите точки $(x, \cos x)$ ги внесеме во правоаголен координатен систем и ги поврземе со глатка линија, ќе го добиеме графикот на функцијата $y = \cos x$ на интервалот $0 \leq x \leq 2\pi$, што претставува “еден бран” од графикот на $y = \cos x$. Ако овој бран го пренесеме едноподруго налево и надесно на интервали со должина 2π , ќе го добиеме графикот на функцијата $\cos x$ на целиот интервал $(-\infty, +\infty)$ (црт.4). Графикот на косинусот го викаме **косинусоида**.



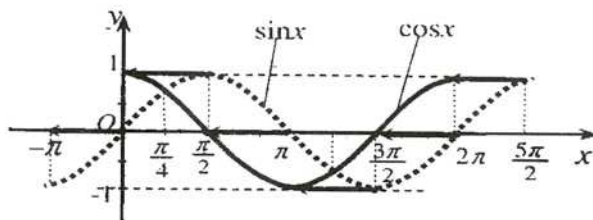
црт.6



црт.7

Да ги внесеме во иста табела карактеристичните точки на $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на интервалот $x \in [0, \frac{5\pi}{2}]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$\sin x$	нула	1	0	-1	0	1
$\cos x$	1	0	-1	0	1	0



црт.9

Од табелата гледаме дека карактеристичните вредности на косинусот (нулите и екстремите) се добиваат за вредности на аргументот кои се “поместени” за $\frac{\pi}{2}$ единици на лево во однос на вредностите на аргументот за кои се добиваат карактеристичните вредности на синусот. а тоа ќе се однесува и за сите други вредности на овие две функции. Тоа пак значи дека графикот на $\cos x$ го добиваме кога графикот на $\sin x$ ќе го поместиме за $\frac{\pi}{2}$ единици налево во правец на x -оската (црт.9). До истите согледувања доаѓаме и со помош на формулата за сведување $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

Од графикот на функцијата можеме да ги согледаме својствата на косинусот кои веќе ги имаме утврдено:

1. $-1 \leq \cos x \leq 1$ или $|\cos x| \leq 1$, т.е функцијата е **ограничена**;
2. графикот е симетричен во однос на y -оската, т.е. $\cos x$ е **парна функција**;
3. графикот ја сече x -оската во точките $\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$, т.е. во $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), за кои $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$; следува $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) се **нули на косинусот**;
4. на основниот интервал $[0, 2\pi]$, $\cos x$ **моноџоно опаѓа** од 1 до -1 на интервалот $[0, \pi]$, а **моноџоно расте** од -1 до 1 на интервалот $[\pi, 2\pi]$. Или воопшто, на целото дефиниционо множество $(-\infty, +\infty)$, $\cos x$ монотонно расте на интервалите $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, а монотонно опаѓа на интервалите $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$;
5. $\cos x$ достигнува **максимум** $y=1$ за $x=2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ и **минимум** $y=-1$ за $x=(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, односно $\cos 2k\pi = 1$, $\cos(2k+1)\pi = -1$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$
6. $\cos x > 0$ за $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, односно за $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
 $\cos x < 0$ за $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ односно за $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Тек и график на функцијата $y = \operatorname{tg} x$.

1^о Дефиниционо множество за тангенсот се интервалите

$$D_{\operatorname{tg} x} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\};$$

2^о множеството вредности е интервалот $V_{\operatorname{tg} x} = (-\infty, +\infty)$;

3^о функцијата е **периодична** со основен период $T=\pi$;

4^о за секој $x=k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\operatorname{tg} k\pi = 0$, па следува, дека **нули на функцијата** се броевите $x=k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

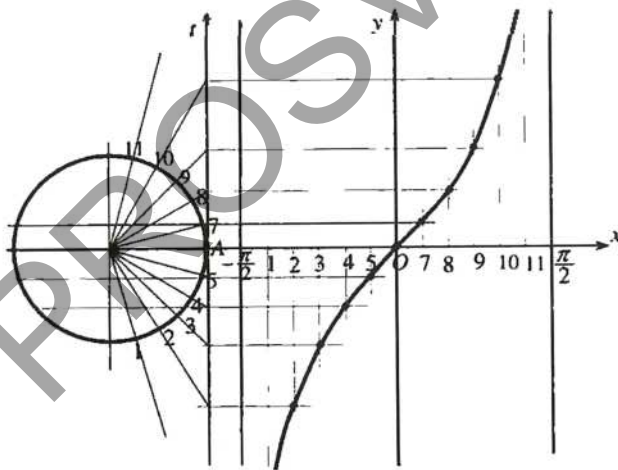
5° Кога x се стреми кон $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi$) тогаш $\operatorname{tg} x \rightarrow \infty$, па следува дека правите $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) се **вертикални асимптоти** за тангенсоидата. За $k=0$ ја добиваме асимптотата $x = \frac{\pi}{2}$, а за $k=-1$ асимптотата $x = -\frac{\pi}{2}$;

6° $\operatorname{tg} x$ **монотонно расте** на секој од интервалите $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; за $k=0$ го добиваме основниот интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

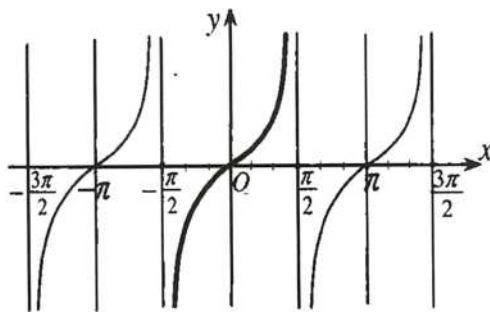
7° На секој интервал $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) графикот е под x -оската, т.е. $\operatorname{tg} x < 0$, а на интервалите $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$), графикот е над x -оската т.е. $\operatorname{tg} x > 0$. За $k=0$, ги добиваме интервалите $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ и $(0, \frac{\pi}{2})$ за кои $\operatorname{tg} x < 0$ односно $\operatorname{tg} x > 0$, соодветно.

8° **График.** Бидејќи основен период за тангенсот е $T=\pi$, доволно е да го конструираме нејзиниот график за вредности на x во интервал со должина π , на пример на интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Графикот на $y = \operatorname{tg} x$ исто како и графикот на синусот можеме да го скицираме со помош на тригонометриска кружница и со помош на таблица од карактеристични вредности.

За да го скицираме графикот со помош на тригонометриската кружница, ја повлекуваме тангенсната оска кон кружницата во точката A (црт.10). Потоа десната половина на кружницата и соодветниот интервал $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ на x -оската ги делиме, на пример, на 12 еднакви делови. Понатамошниот тек на постапката е ист како при скицирањето на графикот на $\sin x$ и $\cos x$ и тој може да се согледа според цртежот 10.



црт.10



црт.11

Кривата на црт.10 е само една гранка од графикот на функцијата $y = \operatorname{tg} x$. Со нејзина translација надесно и налево по должината на x -оската за должини $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ итн., го добиваме графикот на $y = \operatorname{tg} x$ на сите дефинициони интервали $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), (k \in \mathbb{Z})$ (црт.11).

Кривата што го претставува графикот на $y = \operatorname{tg} x$ ја викаме **тангенсоида**.

4. Тек и график на функцијата $y = \operatorname{ctg} x$. Графикот на функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ можеме да го скицираме со помош на графикот на функцијата $y = \operatorname{tg} x$ ползувајќи ја формулата за сведување

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) \quad (1)$$

Од (1) следува дека графикот на $\operatorname{ctg} x$ на основниот интервал $x \in (0, \pi)$, го добиваме кога

графикот на $\operatorname{tg} x$ во интервалот $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, со

translација ќе го поместиме за $\frac{\pi}{2}$ единици на лево во правец на x -оската, а потоа ќе го пресликаме оносиметрично во однос на x -оската (црт.12).

До истиот график ќе дојдеме и ако составиме таблица од извесен број точки од графикот на функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ на основниот интервал $(0, \pi)$, а потоа ги нанесеме во коор-

динатен систем и ги поврземе со глатка линија. Препорачуваме ова ученикот да го направи за вежба.

Кривата што го претставува графикот на $y = \operatorname{ctg} x$ ја викаме **котангенсоида**.

Од графикот ги воочуваме следниве својства за функцијата $y = \operatorname{ctg} x$:

- 1° дефиниционно множество за $\operatorname{ctg} x$ е $D_{\operatorname{ctg} x} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$;
- 2° правите $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ се **вертикални асимптоти** за функцијата $\operatorname{ctg} x$;
- 3° множеството **вредности** е интервалот $(-\infty, +\infty)$, т.е. $\operatorname{ctg} x$ е неограничена функција;
- 4° нули за $\operatorname{ctg} x$ се броевите $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, т.е. броевите $\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$;
- 5° $\operatorname{ctg} x$ **монотонно опаѓа** на секој интервал $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$;
- 6° на секој интервал $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ графикот е над x -оската, т.е. $\operatorname{ctg} x > 0$, а на секој интервал $(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi)$ графикот е под x -оската, т.е. $\operatorname{ctg} x < 0$; за $k=0$ ги добиваме основните интервали $(0, \frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, за кои $\operatorname{ctg} x > 0$ односно $\operatorname{ctg} x < 0$, соодветно.

ЗАДАЧИ

1. Дадена е функцијата $y = \sin x$. а) Дополни ја таблицата:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$
$\sin x$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$			1

б) Користејќи ја табелата под а) нацртај го графикот на функцијата на интервалот $[0, \frac{\pi}{2}]$.

в) Користејќи ја формулата $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ нацртај го графикот на интервалот $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

г) Користејќи ја формулата $\sin(\pi + x) = -\sin x$ нацртај го графикот во интервалот $[\pi, 2\pi]$.

2. а) За вредности на аргументот $x = \{-\pi, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, 0\}$ состави таблица за вредностите на $y = \cos x$.

б) Користејќи ја добиената таблица под а), скицирај го графикот на функцијата $y = \cos x$ во интервалот $[-\pi, 0]$.

в) Користејќи го својството $\cos(-x) = \cos x$ и графикот на функцијата во интервалот $[-\pi, 0]$, скицирај го графикот на $y = \cos x$ на сегментот $[0, \pi]$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	...	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$				-1					$\sqrt{3}$		

3. Дополни ја таблицата и според неа скицирај го графикот на $y = \tan x$ во интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

4. Скицирај го графикот на функцијата $y = \tan x$ во интервалот $[-\pi, \pi]$.

5. а) Дополни ја таблицата и според неа скицирај го графикот на $y = \cot x$ во интервалот $(0, \frac{\pi}{2}]$.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cot x$				1		

б) Ползувајќи го својството $\cot(\pi - x) = -\cot x$ и графикот под а), скицирај го графикот на $\cot x$ на интервалот $[0, \pi]$.

6. Скицирај го графикот на функцијата $y = \cot x$ во интервалот $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

2.2.2. ТЕК И ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $y = a \sin(bx + c) + d$

За да го добиеме графикот на функцијата $y = a \sin(bx + c) + d$, претходно ќе ги разгледаме и скицираме графици на функциите:

$$y = a \sin x, \quad y = \sin(x + c) \quad \text{и} \quad y = \sin bx.$$

1. График на функцијата $y = a \sin x$, ($a \neq 0$). Вредноста на функцијата $y = a \sin x$ за вредност на аргументот x се добива кога вредноста на функцијата $y = \sin x$ ќе ја помножиме со константата a . Од ова следува дека графикот на $y = a \sin x$ може да го добиеме со помош на графикот на $y = \sin x$ така што секоја негова ордината ќе ја помножиме со a . Тоа значи **карактеристичните вредности** (нулите и екстремите) за $y = a \sin x$ се во истите вредности на x како и за $y = \sin x$.

На овој начин, зависно од тоа дали $|a| > 1$ или $|a| < 1$, графикот на $y = a \sin x$ го добиваме, соодветно, само “со расцвртување” или “со свцвртување” на графикот на $y = \sin x$ за $|a|$ -пати во правец на y -оската.

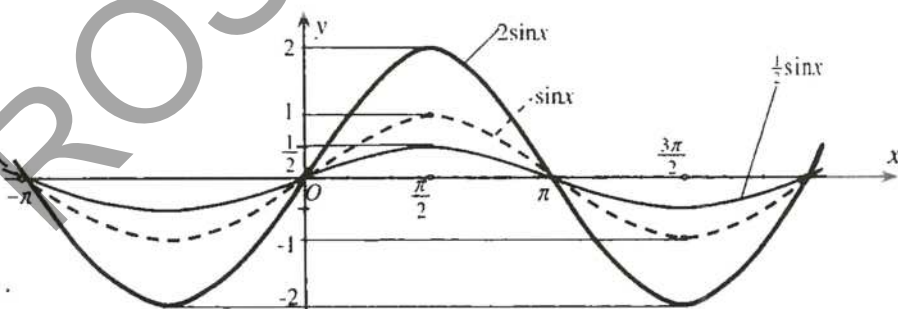
Од $-1 \leq \sin x \leq 1$ следува $-|a| \leq a \sin x \leq |a|$, т.е.

$$\max(a \sin x) = |a|, \quad \min(a \sin x) = -|a|.$$

Бројот $|a|$ се вика **амплитуда** за функцијата $y = a \sin x$, и го дава растојанието на екстремните точки од графикот до апсцисната оска.

➤ **Пример 1.** Да ги скицираме графици на функциите $y = \sin x$, $y_1 = 2 \sin x$ и $y_2 = \frac{1}{2} \sin x$, во исти координатен систем.

Решение. Најпрвин го скицираме графикот на $y = \sin x$; потоа графикот на y_1 го добиваме со растегнување на синусоидата за 2 единици во правец на y -оската, а графикот на y_2 со стегане за $\frac{1}{2}$ единица во правец на y -оската (црт.1) ■



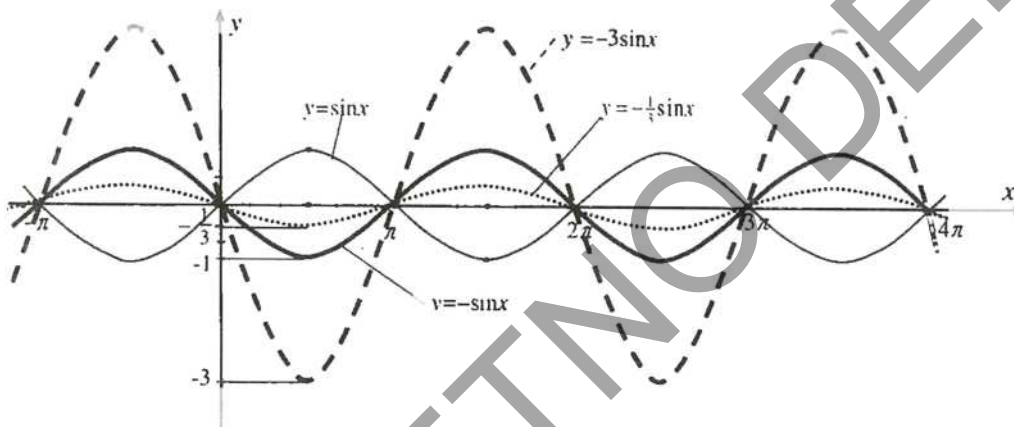
црт.1

✓ **Пример 2.** Да ги скицираме графициите на функциите а) $y = -\sin x$ б) $y_1 = -3\sin x$
 в) $y_2 = -\frac{1}{3}\sin x$.

Решение. а) Овде $a = -1$. Тоа значи дека секоја ордината на $y = \sin x$ треба да ја помножиме со -1 . Бидејќи точките (x, y) и $(x, -y)$ се симетрични во однос на x -оската, графикот на $y = -\sin x$ го добиваме кога графикот на $y = \sin x$ ќе го пресликаме симетрично во однос на x -оската (црт.2)

б) Бидејќи $a = -3 < 0$, графикот на $y_1 = -3\sin x$ го добиваме со помош на графикот на $y = -\sin x$, со негово истегнување за 3 единици по должината на y -оската (црт.2).

На ист начин го скицираме и графикот под в) (обиди се да го нацрташ самиот следејќи ја истата постапка како под б) (црт.2) ■



црт.2

2. График на $y = \sin(x + c)$. За произволна вредност $x_0 \in \mathbb{R}$, важи:

$$\sin x_0 = \sin((x_0 + c) - c),$$

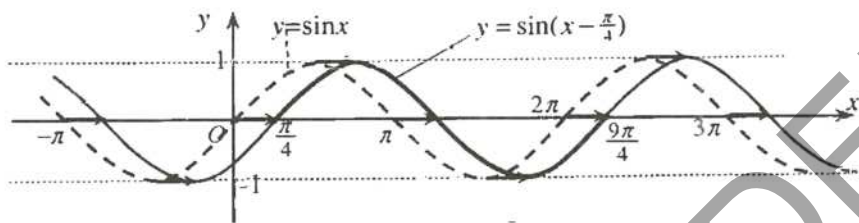
од каде следува дека точките од графикот на $y = \sin(x + c)$ можеме да ги добиеме со translација на точките од синусоидата $y = \sin x$ за c единици во правец на x -оската.

Тоа значи, основниот интервал (периодот) и карактеристичните точки од графикот на $y = \sin(x + c)$ (нулите и екстремите) се поместени за c единици во однос на соодветните точки од графикот на $y = \sin x$, и тоа за c единици налево ако $c > 0$ (транслација налево), или за $|c|$ единици надесно ако $c < 0$ (транслација надесно). Следува:

- основен интервал за $y = \sin(x + c)$ е интервалот $[-c, 2\pi - c]$;
- $y = 0$ т.е. $\sin(x + c) = 0$ за $x + c = k\pi$, т.е. $x = k\pi - c$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $y_{\max} = 1$ т.е. $\sin(x + c) = 1$ за $x + c = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, т.е. $x = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - c$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $y_{\min} = -1$ т.е. $\sin(x + c) = -1$ за $x + c = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, т.е. $x = (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) - c$, $k \in \mathbb{Z}$;
- графикот на $y = \sin(x + c)$ е “изместена” синусоида.

► **Пример 3.** Упоиштебувајќи го графикои на функцијата $\sin x$, да ги скицираме графициите на функциите: а) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ б) $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$

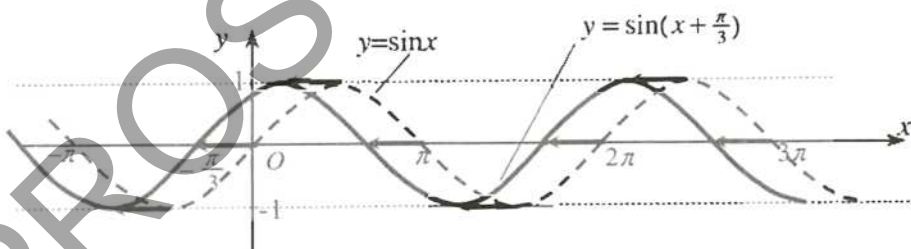
Решение. а) Овде $c = -\frac{\pi}{4} < 0$, па затоа графикот на $\sin x$ ќе го поместиме по должината на x -оската за $\frac{\pi}{4}$ единици на десно. Следува дека, основниот бран е во интервалот $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ (црт.3).



црт.3

б) Овде $c = \frac{\pi}{3} > 0$, па графикот на $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ го добиваме со translација на графикот на $\sin x$ за $\frac{\pi}{3}$ единици налево. Тоа наједноставно го правиме така што ги поместуваме карактеристичните точки, нулите и екстремите за $\frac{\pi}{3}$ единици налево и ги поврзуваме со крива идентична на основната синусоида (црт.4). Основниот интервал, во кој го скицираме основниот бран на функцијата е $[-\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}]$. Заради прегледност, карактеристичните точки од графикот во основниот интервал ги внесуваме во таблица:

x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$	$\pi - \frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$	$2\pi - \frac{\pi}{3}$
$\sin(x + \frac{\pi}{3})$	0	1	0	-1	0
	нула	max	нула	min	нула



црт.4

3. График на функцијата $y = \sin bx$. Видовме дека основниот период на функцијата $y = \sin x$ е $T = 2\pi$. Ќе покажеме дека и $y = \sin bx$ е периодична функција со основен период $T = \frac{2\pi}{|b|}$. Навистина, за $b > 0$ имаме:

$$\sin bx = \sin(bx + 2\pi) = \sin(bx + b \cdot \frac{2\pi}{b}) = \sin b(x + \frac{2\pi}{b}).$$

На пример, основниот период на функцијата $y = \sin 2x$ е $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, а период за $y = \sin \frac{x}{2}$ е $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. Забележуваме дека за $b = 2 > 1$, функцијата $y = \sin 2x$ има основен период кој е двапати помал во однос на периодот на функцијата $y = \sin x$, а за $b = \frac{1}{2} < 1$ периодот на функцијата $y = \sin \frac{x}{2}$ е двапати поголем во однос на периодот на $y = \sin x$.

Ова важи и во општ случај. Ако $|b| > 1$, $\frac{2\pi}{|b|} < 2\pi$, тогаш основниот период на функцијата $y = \sin bx$ е помал од основниот период на $\sin x$. Ако $|b| < 1$ тогаш $\frac{2\pi}{|b|} > 2\pi$, па следува, основниот период на $y = \sin bx$ да е поголем од основниот период на $\sin x$.

Да го знаеме текот и да го нацртаме графикот на функцијата $y = \sin bx$ доволно е да го скицираме нејзиниот график на *основниот интервал* $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ и тоа е *основниот бран* за $y = \sin bx$.

Бројот $|b|$ покажува колку пати основниот интервал се содржи во основниот интервал за функцијата $y = \sin x$, односно во отсечката со должина 2π и го нарекуваме *кружна фреквенција* за функцијата $y = \sin bx$.

Бројот $T = \frac{2\pi}{|b|}$ (периодот на функцијата), ја дава должината на основниот интервал на функцијата $y = \sin bx$ и се нарекува уште и *бранова должина* за функцијата.

Од сето горе кажано следува дека графикот на функцијата $y = \sin bx$ го добиваме од графикот на $y = \sin x$ со “*растегнување*” за $|b|$ -пати ако $|b| < 1$, или со “*свивање*” за $|b|$ пати ако $|b| > 1$, во правец на x -оската. Тоа пак значи дека карактеристичните вредности (нулите и екстремите) функцијата $y = \sin bx$ ги добива во апсциси кои се $|b|$ -пати поголеми или помали од апсцисите во кои функцијата $y = \sin x$ ги добива соодветните карактеристични вредности, зависно од тоа дали $|b| < 1$ или $|b| > 1$. Така имаме:

$y = 0$, т.е. $\sin bx = 0$ за $bx = k\pi$, $x = k \cdot \frac{\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$, а нулите во основниот интервал $[0, \frac{2\pi}{ b }]$ ги добиваме за $k = 0, 1, 2$; $y_{\max} = 1$, т.е. $\sin bx = 1$ за $bx = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$; максимумот во основниот

интервал $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ го добиваме за $k = 0$.

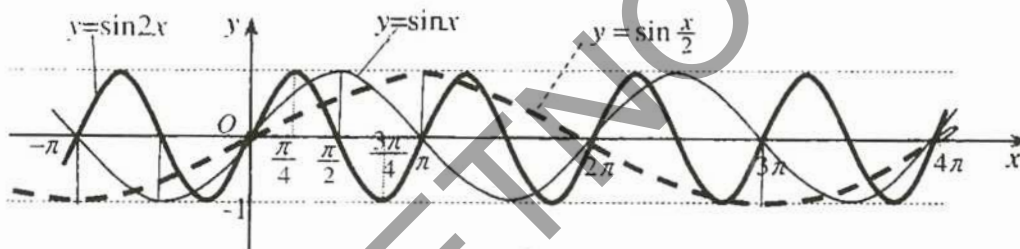
- $y_{\min} = -1$, т.е. $\sin bx = -1$ за $bx = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{2b} + \frac{2k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$; минимумот во основниот интервал $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ го добиваме за $k = 0$.

➤ **Пример 4.** Да ги нацртаме во исти координатен систем графичките на функциите

а) $y = \sin 2x$ б) $y = \sin \frac{x}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
	нула	max	нула	min	нула

Решение. а) Основниот период за $y = \sin 2x$ како што видовме погоре е $T = \pi$, па основниот интервал во кој ќе го нацртаме основниот бран е интервалот $[0, \pi]$. Карактеристичните точки за функцијата ги внесуваме во таблицата на лево, а графикот е прикажан на црт. 5.



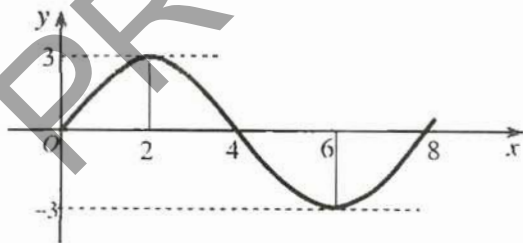
црт.5

x	0	π	2π	3π	4π
$\sin \frac{x}{2}$	0	1	0	-1	0
	нула	max	нула	min	нула

лево ■

б) Основниот период за $y = \sin \frac{x}{2}$ е $T = 4\pi$, а основниот интервал е $[0, 4\pi]$ (црт.5). Карактеристичните вредности на функцијата се внесени во таблицата

➤ **Пример 5.** Да ја определиме амплитудата, периодот и равенката на кривата прикажана на црт.6.



црт.6

Решение. Кривата е синусоида $y = a \sin bx$, со амплитуда $a = 3$ и период

$$T = 8. \text{ Од равенството } T = \frac{2\pi}{b} \text{ имаме } 8 = \frac{2\pi}{b}.$$

од каде го наоѓаме $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Според тоа,

$$\text{равенката на кривата е } y = 3 \sin \frac{\pi}{4} x.$$

4. График на функцијата $y = a \sin(bx + c)$. Функцијата

$$y = a \sin(bx + c) \quad (a \neq 0, b > 0) \quad (1)$$

е периодична функција со основен период $\frac{2\pi}{b}$. Навистина,

$$a \sin(b(x + \frac{2\pi}{b}) + c) = a \sin(bx + b \cdot \frac{2\pi}{b} + c) = a \sin((bx + c) + 2\pi) = a \sin(bx + c).$$

Бројот $|a|$ претставува амплитуда за функцијата $y = a \sin(bx + c)$. Поради

$$a \sin bx = a \sin b(x + \frac{c}{b} - \frac{c}{b}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

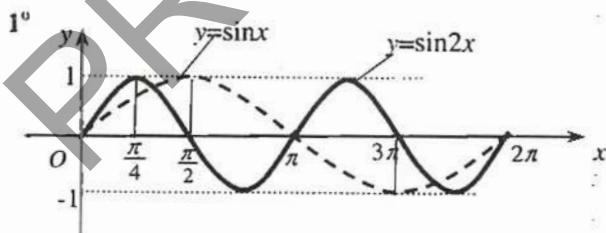
графикот на функцијата (1) се добива со транслација на графикот на функцијата $y = a \sin bx$ во правец на x -оската за $\frac{c}{b}$ единици налево ако е $\frac{c}{b} > 0$, или за $|\frac{c}{b}|$ надесно ако е $\frac{c}{b} < 0$.

Врз основа на горе кажаното следува дека графикот на функцијата (1) можеме да го добиеме со трансформација на графикот на $y = \sin x$, така што едноподруго ги скицираме графици на: $y = \sin x$, $y = \sin bx$, $y = \sin b(x + \frac{c}{b})$ и конечно $y = a \sin b(x + \frac{c}{b})$, кои веќе знаеме да ги нацртаме.

► **Пример 6.** Да го скицираме графикот на функцијата $y = \frac{1}{2} \sin(2x + 1)$ со помош на графикот на $y = \sin x$.

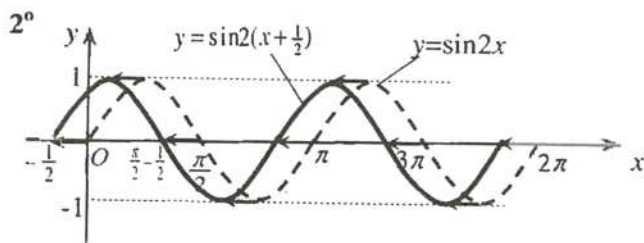
Решение. Ја трансформираме равенката $y = \frac{1}{2} \sin(2x + 1)$ во вид $y = \frac{1}{2} \sin 2(x + \frac{1}{2})$.

Основниот период е $T = \frac{2\pi}{2} = \pi < 2\pi$, што значи имаме “стегање” на основниот бран на синусоидата $y = \sin x$ за два пати. Бидејќи $\frac{c}{b} = \frac{1}{2}$, имаме транслација на синусоидата за $\frac{1}{2}$ единица налево, односно основниот интервал е $[-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}]$. Амплитудата е $a = \frac{1}{2} < 1$, што значи дека амплитудата на $y = \sin x$ треба да ја намалиме за два пати. Значи, ги цртаме по ред графици на 1° $y = \sin x$; 2° $y = \sin 2x$ (црт. 7а); 3° $y = \sin 2(x + \frac{1}{2})$ (црт. 7б); 4° $y = \frac{1}{2} \sin 2(x + \frac{1}{2})$ (црт. 7в).



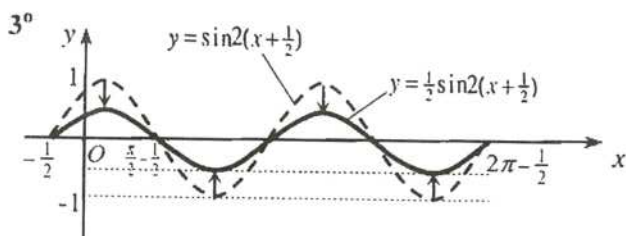
црт. 7а

стегање во правец на x -оската



црт.7б

транслација за $\frac{1}{2}$ налево



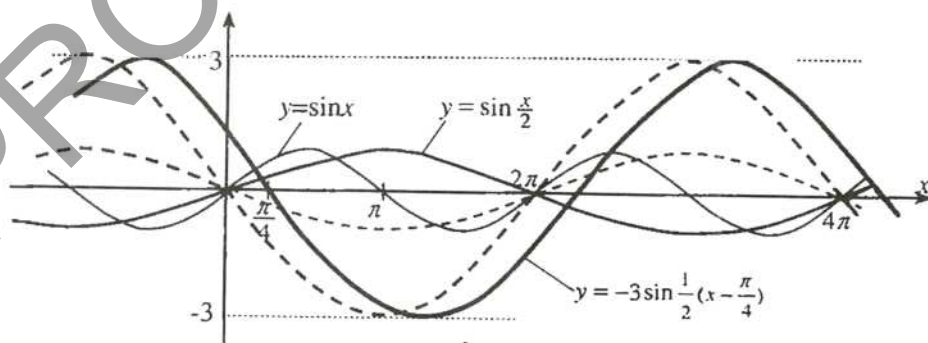
црт.7в

намалување на амплитудата т.е.
стегање во правец на у-оската

➤ **Пример 7.** Да го испитаме функцијата и да ја нацртаме графикот на функцијата $y = -3 \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}\right)$.

Решение. Можеме да го скицираме графикот на функцијата следејќи ја истата постапка како во примерот 1. Основниот период е $T = \frac{2\pi}{1} = 4\pi$; $\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4} < 0$ што значи

транслација на синусоидата за $\frac{\pi}{4}$ единици надесно по должината на x -оската; $a = -3 < 0$ т.е. амплитудата е $|a| = |-3| = 3 > 1$ што значи дека амплитудата на $y = \sin x$ треба да се зголеми за три пати. Следува, да ги нацртаме по ред графиците на: $y = \sin x$; $y = \sin \frac{1}{2}x$; $y = \sin \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ и на крај $y = -3 \sin \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (црт.8).



црт.8

Графикот на функцијата можеме да го добиеме и директно, определувајќи ги карактеристичните вредности (нулите и екстремите) за функцијата на основниот интервал $[\frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}]$ т.е. $[\frac{\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}]$. За дадената функција тие се:

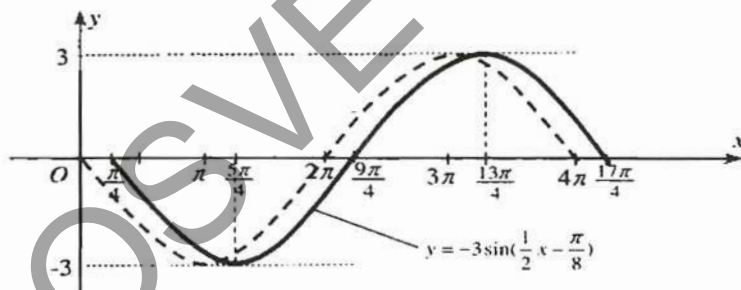
1. нули. ги наоѓаме од условот $-3\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$, односно $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} = 0$ или $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi$ или $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} = 2\pi$. од каде: $x = \frac{\pi}{4}$, $x = 2(\pi + \frac{\pi}{8}) = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$, $x = 2(2\pi + \frac{\pi}{8}) = 4\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{17\pi}{4}$.

2. екстремни вредности: $y_{\max} = 3$ ако $-3\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 3$ т.е. $\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}) = -1$, од каде наоѓаме: $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$ односно $x = 2(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}) = 3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$;

$y_{\min} = -3$ ако $-3\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}) = -3$ т.е. $\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 1$, од каде $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$, односно $x = 2(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

Заради прегледност добиените вредности ги внесуваме во таблица со чија помош го цртаме графикот на функцијата (црт.9)

x	$\frac{\pi}{4}$	$\pi + \frac{\pi}{4}$	$2\pi + \frac{\pi}{4}$	$3\pi + \frac{\pi}{4}$	$4\pi + \frac{\pi}{4}$
$-3\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8})$	0	-3	0	3	0
	нула	min	нула	max	нула



црт.9

5. График на функцијата $y = a\sin(bx+c)+d$. За произволна вредност на аргументот x - вредноста на функцијата

$$y = a\sin(bx+c)+d \quad (3)$$

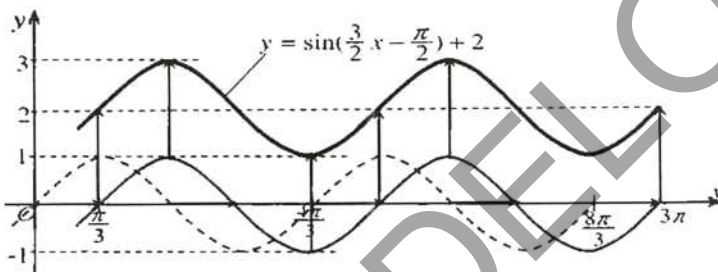
ја добиваме кога вредноста на функцијата $y = a\sin(bx+c)$ ќе ја зголемиме за d . Оттука следува дека графикот на функцијата $y = a\sin(bx+c)+d$ го добиваме со translacija на графикот на функцијата $y = a\sin(bx+c)$ за d единици во правец на y -оската и тоа: ако $d > 0$ со translacija во позитивната насока (нагоре), а ако $d < 0$ - со translacija во негативната насока (надолу).

➤ **Пример 8.** Да го скицираме графикот на функцијата $y = \sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{2}) + 2$.

Решение. Прво го скицираме графикот на $y = \sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{2})$, за кој веќе видовме како се добива, а потоа со трансформација за 2 единици во позитивната насока на y-оската го цртаме графикот на

$$y = \sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{2}) + 2$$

Состави ја таблицата на карактеристични вредности за функцијата во основниот интервал, и според неа нацртај го графикот на функцијата, а потоа спореди го добиениот цртеж со црт.10.



црт.10

ЗАДАЧИ

Одреди ја амплитудата и скицирај ги графиците на функциите на интервалот $[-2\pi, 2\pi]$:

1. а) $y = \sin x$; б) $y = \frac{3}{2} \sin x$; в) $y = \frac{1}{3} \sin x$; 2. а) $y = -\sin x$; б) $y = -3 \sin x$; в) $y = -\frac{2}{3} \sin x$

3. Со помош на графикот на $\sin x$ скицирај ги графиците на функциите:

а) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$; б) $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$; в) $y = -\sin(x - \frac{\pi}{6})$; г) $y = 2 \sin(x - 2)$

4. Определи го периодот а потоа скицирај ги графиците на функциите:

а) $y = \frac{2}{3} \sin 3x$; б) $y = -2 \sin(-\frac{1}{4}x)$; в) $y = \sin \frac{3x}{2}$

5. Испитај го текот и нацртај го графикот на функциите

а) $y = \sin(3x - \frac{\pi}{6})$ б) $y = \frac{3}{2} \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$ в) $y = -2 \sin(2x - 1)$

6. Со помош на графикот на $\sin x$ нацртај ги графиците на функциите (7-9) во основните интервали:

а) $y = -\sin 2(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ б) $y = 2 \sin(2 - x) - 2$ в) $y = \frac{1}{2} \sin \frac{2}{3}x + 3$

2. 2. 3. ТЕК И ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $y=a\cos(bx+c)+d$.

Графикот на функцијата

$$y = a \cos(bx + c) + d \quad (1)$$

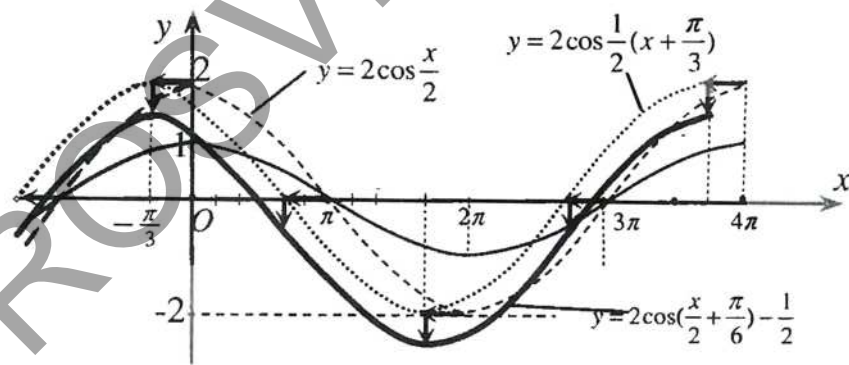
можеме да го добиеме со помош на графикот на функцијата $y = \cos x$ со постапка аналогна на онаа со која го добивме графикот на функцијата $y = a \sin(bx + c) + d$ од графикот на $y = \sin x$, т.е. извршувајќи ги по ред трансформациите: “стегане” (ако $b > 1$) или “растегнување” (ако $b < 1$) на основниот бран на $\cos x$ за $|b|$ пати во правец на x -оската; транслација по должината на x -оската за $-\frac{c}{b}$ единици; “растегнување” ($a > 1$) или “стегане” ($a < 1$) на амплитудата за $|a|$ пати по должината на y -оската и на крај транслација за d единици по должината на y -оската.

Значи, едноподруго ги цртаме графиците на функциите:

$$y = \cos x, y = \cos bx, y = \cos b(x + \frac{c}{b}), y = a \cos b(x + \frac{c}{b}) \text{ и конечно } y = a \cos(bx + c) + d.$$

► **Пример 1.** Да го нацртаме графикот на функцијата $y = 2 \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$ со помош на графикот на $y = \cos x$.

Решение Ја запишуваме функцијата во вид $y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2}$, а потоа ги скицираме едноподруго графиците на функциите: $y = \cos \frac{1}{2}x$, $y = \cos \frac{1}{2}(x + \frac{\pi}{3})$, $y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + \frac{\pi}{3})$ и $y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2}$ (црт.1).



црт.1

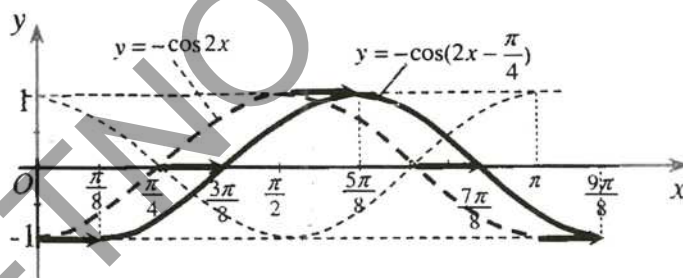
► **Пример 2.** Да го исцртаме графикот и да го скицираме графикот на функцијата: $y = -\cos(2x - \frac{\pi}{4})$.

Решение. Основниот период на функцијата е $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, а основниот интервал во кој ја испитуваме функцијата е интервалот $[\frac{\pi}{8}, \pi + \frac{\pi}{8}]$, т.е. $[\frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}]$. Карактеристичните вредности за функцијата (нулите и екстремите) во основниот интервал се:

1. **нули:** ги наоѓаме од условот $-\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ и $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, односно $x = \frac{3\pi}{8}$ и $x = \frac{7\pi}{8}$;

2. **екстремии:** $y_{\max} = 1 \Leftrightarrow -\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{8}$;
 $y_{\min} = -1 \Leftrightarrow -\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 0$ или $2x - \frac{\pi}{4} = 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}$ и $x = \frac{9\pi}{8}$. Заради прегледност најдените вредности ги внесуваме во таблица според која го цртаме графикот (црт.2)

x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$
$-\cos(2x - \frac{\pi}{4})$	-1	0	1	0	-1
	min	нула	max	нула	min



црт.2

ЗАДАЧИ

1. Одреди ја амплитудата и скицирај го графикот на интервалот $[-2\pi, 2\pi]$

а) $y = \frac{3}{4} \cos x$; б) $y = \frac{1}{3} \cos x$; в) $y = -\cos x$; г) $y = -2 \cos x$; д) $y = -\frac{3}{2} \cos x$

2. Со помош на графикот на $\cos x$ скицирај ги графиците на функциите (6-9):

а) $y = 2 \cos(x - \frac{\pi}{12})$; б) $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$; в) $y = -\cos(\frac{\pi}{6} - x)$; г) $y = \cos(x - 1)$

3. Определи го периодот а потоа скицирај го графикот на функциите

а) $y = \cos(-2x)$; б) $y = \frac{2}{3} \cos \frac{x}{3}$; в) $y = -2 \cos(-\frac{1}{4}x)$; г) $y = \cos \frac{3x}{2}$

4. Со соодветни трансформации на графикот на $\cos x$ скицирај ги графиците на функциите во основниот интервал:

а) $y = \cos 3(x - \frac{\pi}{6})$; б) $y = \frac{3}{2} \cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4})$; в) $y = 2 \cos(1 - 2x)$

5. Испитај го текот и нацртај го графикот на функциите:

а) $y = -\cos 2(x - \frac{\pi}{2}) + 1$; б) $y = 3 \cos(3x - \pi) - 2$; в) $y = \frac{2}{3} \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) + \frac{1}{2}$ г) $y = 3 \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$

2.3. ТРАНСФОРМИРАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ИЗРАЗИ

2.3.1. АДИЦИОНИ ТЕОРЕМИ ЗА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ

Теорема 1. За произволни вредности на α и β важат адиционите формули:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (C_{\alpha+\beta})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (C_{\alpha-\beta})$$

Доказ. Ќе ја докажеме најпрвин формулата $(C_{\alpha-\beta})$. Нека α и β се произволно избрани агли (црт.1). Координатите на точките M и N се:

$$x_M = \cos \alpha, \quad y_M = \sin \alpha$$

$$x_N = \cos \beta, \quad y_N = \sin \beta$$

Растојанието d меѓу две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ се пресметува со формулата

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

според која за квадратот на растојанието MN имаме:

$$\begin{aligned} \overline{MN}^2 &= (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = \\ &= \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \\ &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

Ако аголот $\alpha - \beta = \angle NOM$ го ротираме и го донесеме во стандардната положба така што $\alpha - \beta = \angle AOR$, тогаш координатите на точката R се: $x_R = \cos(\alpha - \beta)$, $y_R = \sin(\alpha - \beta)$, па за квадратот на растојанието AR имаме:

$$\begin{aligned} \overline{AR}^2 &= (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2 = \\ &= \cos^2(\alpha - \beta) - 2 \cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Од $\overline{AR} = \overline{MN}$ (зошто?), односно $\overline{AR}^2 = \overline{MN}^2$, следува:

$$2 - 2(\cos(\alpha - \beta)) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

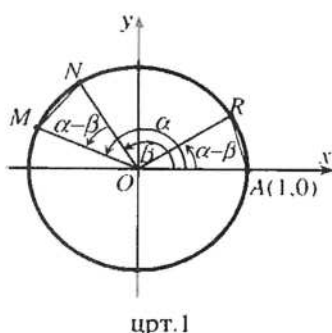
од каде ја добиваме формулата $(C_{\alpha-\beta})$.

Ако во $(C_{\alpha-\beta})$ го замениме β со $-\beta$, и притоа земеме предвид дека $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, ја добиваме формулата $(C_{\alpha+\beta})$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad \blacklozenge$$

Забелешка. Во доказот на теоремата немавме никакви ограничувања за аргументите α и β , тие се со произволна големина. Формулата за растојанието е исто така точна за која било положба на точките, па според тоа доказот има општ карактер, т.е. важи за произволни вредности на α и β .

Последица 1. Ако $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, тогаш $\cos \alpha = \sin \beta$, $\cos \beta = \sin \alpha$.



црт.1

Доказ. Од $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ односно $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, според формулата ($C_{\alpha-\beta}$), имаме:

$$\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \beta + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \beta = 0 \cdot \cos \beta + 1 \cdot \sin \beta = \sin \beta \quad \blacklozenge$$

Последица 2. Ако $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, тогаш $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$, $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha$.

Доказ. Според последицата 1: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \operatorname{ctg} \beta \quad \blacklozenge$

Теорема 2. За произволни вредности на α и β важат формулите:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (S_{\alpha+\beta})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (S_{\alpha-\beta})$$

Доказ. Од последицата 1 имаме:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Ако во $(S_{\alpha+\beta})$ го замениме β со $-\beta$, добиваме:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \blacklozenge$$

Со помош на адитивните формули можеме да ги најдеме точните вредности на тригонометриските функции за некои вредности на аголот (без таблица или калкулатор), како и да упростиме некои тригонометриски изрази. Тоа ќе го илустрираме на неколку примери.

➤ **Пример 1.** Да ја определиме вредноста на: а) $\cos 75^\circ$; б) $\sin 15^\circ$.

Решение. а) Забележуваме дека $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$. Тогаш, според формулата ($C_{\alpha+\beta}$):

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$$

б) Бидејќи $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, од $(S_{\alpha-\beta})$ имаме:

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \blacksquare$$

➤ **Пример 2.** Да ја определиме вредноста $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Решение. Бидејќи $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, од формулата $(S_{\alpha+\beta})$, имаме:

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \quad \blacksquare$$

► **Пример 3.** Ако $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) и $\sin \beta = \frac{5}{13}$ ($\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$), да ја определиме вредноста на $\cos(\alpha + \beta)$.

Решение. За да ја определиме вредноста на $\cos(\alpha + \beta)$, треба да ги најдеме $\cos \alpha$ и $\cos \beta$. Бидејќи $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ следува $\cos \alpha > 0$, па $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. Слично, за $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $\cos \beta < 0$, па $\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$. Сега имаме:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{56}{65} \blacksquare$$

Теорема 3. За произволни агли α и β за кои се определени $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, т.е. $\alpha, \beta \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, важат адиционните формули за тангенсој

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (T_{\alpha \pm \beta})$$

Доказ: Земајќи ја предвид претпоставката (1), имаме

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \pm \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \mp \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 \mp \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Теорема 4. За произволни агли α и β , за кои се определени $\operatorname{ctg} \alpha, \operatorname{ctg} \beta, \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$, т.е. $\alpha, \beta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ важат адиционните формули за котангенсој

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha} \quad (CT_{\alpha \pm \beta})$$

Доказот на оваа теорема се изведува аналогно како оној за $(T_{\alpha \pm \beta})$ и го оставаме за вежба.

► **Пример 4.** Да го упростиме, а потоа да ја одредиме вредноста на изразот:

$$\frac{\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 170^\circ}{1 + \operatorname{ctg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ}.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 170^\circ}{1 + \operatorname{ctg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg}(180^\circ - 10^\circ)}{1 + \operatorname{ctg}(90^\circ - 70^\circ) \cdot \operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 70^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ} = \operatorname{tg}(70^\circ - 10^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

1. Ако $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, ползувајќи ги адисионите теореми докажи:

а) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$; б) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$; в) $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$;

Упрости ги изразите:

2. $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$

3. $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$

4. $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta) + \cos \alpha \sin \beta}$

Пресметај:

5. $\operatorname{ctg}(30^\circ + \alpha)$, ако $\operatorname{ctg} \alpha = 2$

6. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} + \alpha)$, ако $\operatorname{ctg} \alpha = 1.5$

7. $\cos(60^\circ - \alpha)$, ако $\cos \alpha = \frac{5}{13}$

8. $\sin(45^\circ + \alpha)$, ако $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$

Докажи ги идентитетите:

9. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

10. $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$

11. $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45^\circ + \alpha)}{2 \sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

2.3.2. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ДВОЕН И ПОЛОВИНА АГОЛ

Ако во адисионите формули $(S_{\alpha+\beta})$, $(C_{\alpha+\beta})$, $(T_{\alpha+\beta})$ и $(CT_{\alpha+\beta})$ ставиме $\alpha = \beta$, ги добиваме формулите:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (S_{2\alpha})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (C_{2\alpha})$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (T_{2\alpha})$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \quad (CT_{2\alpha})$$

познати како формули за тригонометриски функции од двоен агол.

➤ **Пример 1.** Да ја провериме формулата $(S_{2\alpha})$ за $\alpha = 30^\circ$.

Решение. Знаеме дека $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ако во формулата $(S_{2\alpha})$ замениме $\alpha = 30^\circ$, добиваме $\sin 60^\circ = \sin 2 \cdot 30^\circ = 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

➤ **Пример 2.** Ако α е агол од I квадрант и $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, да ги определиме вредностите на $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Решение. Од формулата $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ наоѓаме $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$, а потоа и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$. Од $(S_{2\alpha})$, $(C_{2\alpha})$ и $(T_{2\alpha})$ наоѓаме:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}, \quad \cos 2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7} \blacksquare$$

► **Пример 3.** Да го изразиме $\sin 4x$ како функција од аргументот x .

Решение. Имаме $\sin 4x = \sin 2 \cdot 2x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 2(2 \sin x \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 4 \sin x \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cos x \blacksquare$

Ако во адиционите формули $(S_{\alpha+\beta})$, $(C_{\alpha+\beta})$, $(T_{\alpha+\beta})$ и $(CT_{\alpha+\beta})$ наместо α и β ставиме $\frac{\alpha}{2}$ ќе ги добиеме формулите:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}; \quad \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$$

Од основниот идентитет $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и идентитетот $(C_{2\alpha})$ ги добиваме и следниве формули за $\cos 2\alpha$:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (1)$$

и

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1. \quad (2)$$

Ако ја решиме равенката (1) по $\sin^2 \alpha$, а (2) по $\cos^2 \alpha$ ги добиваме идентитетите:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (3)$$

Ако во (3) и (4) го замениме α со $\frac{\alpha}{2}$, ги добиваме формулите:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \text{т.е.} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (S_{\frac{\alpha}{2}})$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \text{т.е.} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Од $(S_{\frac{\alpha}{2}})$ и $(C_{\frac{\alpha}{2}})$ следуваат формулите:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (T_{\frac{\alpha}{2}}); \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \quad (CT_{\frac{\alpha}{2}})$$

Идентитетите $(S_{\frac{\alpha}{2}})$, $(C_{\frac{\alpha}{2}})$, $(T_{\frac{\alpha}{2}})$, $(CT_{\frac{\alpha}{2}})$ се познати како *формули за тригонометриските функции од половина агол*. При нивното користење, избираме знак “+” или “-” во зависност од тоа во кој квадрант е аголот $\frac{\alpha}{2}$.

➤ **Пример 4.** Да ја најдеме точна вредност на $\cos \frac{5\pi}{8}$.

Решение. Бидејќи $\frac{5\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{4}$, за да ја пресметаме вредноста $\cos \frac{5\pi}{8}$ ќе ја искористиме формулата $(C_{\frac{\alpha}{2}})$ за $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, што е агол од II квадрант, во кој косинусот е негативен, па

$$\text{имаме: } \cos \frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{5\pi}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})}{2}} = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

ЗАДАЧИ

1. Пресметај: а) $\sin 2\alpha$ ако е $\sin \alpha = \frac{12}{13}$; б) $\sin \alpha$ ако е $\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$, $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$

в) $\sin 2\alpha$ ако $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

2. Ако е $\sin \alpha = -\frac{24}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, пресметај: а) $\sin \frac{\alpha}{2}$ б) $\cos \frac{\alpha}{2}$ в) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ г) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

3. Ако $\alpha = 22^\circ 30'$, пресметај ги вредностите на $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ без примена на дигитрон.

4. Ако $\cos 840^\circ = -\frac{1}{2}$ пресметај: а) $\cos 420^\circ$ б) $\cos 210^\circ$ в) $\cos 105^\circ$

Упрости ги изразите:

5. $\frac{\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha + 1}$ 6. $\frac{\sin \alpha - \sin^3 \alpha}{\sin 2\alpha}$

Докажи ги идентитетите:

7. $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$

8. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ 15. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

9. $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \alpha)$

10. $\frac{1 - \cos \alpha + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + \sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

11. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

12. $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

13. $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$

2.3.3. ТРАНСФОРМИРАЊЕ НА ПРОИЗВОД И ЗБИР НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

Теорема 1. За произволни вредности на α и β точни се формулираат:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (C \cdot C)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (S \cdot S)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad (S \cdot C)$$

Доказ. Ако ги собереме соодветните страни на $(C_{\alpha+\beta})$ и $(C_{\alpha-\beta})$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (C_{\alpha+\beta})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (C_{\alpha-\beta})$$

добиваме: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$, а ако од $(C_{\alpha-\beta})$ го одземеме $(C_{\alpha+\beta})$ го добиваме равенството

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Ако во последните две равенства ги поделеме двете страни со 2 ги добиваме формулите $(C \cdot C)$ и $(S \cdot S)$. На ист начин од формулите:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (S_{\alpha+\beta})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (S_{\alpha-\beta})$$

ако ги собереме левите и десните страни го добиваме равенството

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta,$$

од кое по делење со 2 ја добиваме формулата $(S \cdot C)$ ♦

➤ **Пример 1.** Да го трансформираме во збир производот $2 \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$.

Решение. $2 \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8}\right) \right] = \cos \frac{11\pi}{24} + \cos \frac{5\pi}{24}$ ■

➤ **Пример 2.** Да го докажеме идентитетот: $2 \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha + \cos 3\alpha = \cos \alpha$.

Решение. $2 \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha + \cos 3\alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(2\alpha - \alpha) - \cos(2\alpha + \alpha)] + \cos 3\alpha =$
 $= \cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 3\alpha = \cos \alpha$ ■

Теорема 2. За произволни вредности на α и β се точни равенствата:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (C + C)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (C - C)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (S + S)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (S - S)$$

и за ситие $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ се точни равенствата:

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \quad (T \pm T)$$

Доказ. За да ги докажеме првите четири формули воведуваме помошни аргументи x и y преку равенствата:

$$x + y = \alpha, \quad x - y = \beta \quad (1)$$

Ако равенките (1) ги решиме по x и y , добиваме

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (2)$$

Ако сега ја искористиме формулата $(C \cdot C)$ имаме:

$$\cos \alpha + \cos \beta \stackrel{(1)}{=} \cos(x + y) + \cos(x - y) \stackrel{(C \cdot C)}{=} 2 \cos x \cdot \cos y \stackrel{(2)}{=} 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

а тоа е формулата $(C + C)$.

Аналогно ги докажуваме преостанатите три равенства (препорачуваме, заради утврдување, да се докажат за вежба). За формулите $(T \pm T)$ имаме:

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad \blacklozenge$$

➤ **Пример 3.** Да го трансформираме во производ збирот $1 + \sin \alpha$.

Решение. Бидејќи $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, имаме:

$$1 + \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \alpha = 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \quad \blacksquare$$

➤ **Пример 4.** Да го трансформираме во производ збирот $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ &= \sin 10^\circ + 2 \sin \frac{40^\circ + 20^\circ}{2} \cdot \cos \frac{40^\circ - 20^\circ}{2} = \\ &= \sin 10^\circ + 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 10^\circ = \sin 10^\circ + 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 10^\circ = \cos 80^\circ + \cos 10^\circ = \\ &= 2 \cos \frac{80^\circ + 10^\circ}{2} \cdot \cos \frac{80^\circ - 10^\circ}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 35^\circ = \sqrt{2} \cos 35^\circ \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1. Пресметај ги изразите: а) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; б) $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$; в) $\sin 105^\circ \cdot \sin 15^\circ$; г) $\cos \frac{7\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$

Трансформирај ги во производ изразите:

2. $\cos 35^\circ - \cos 25^\circ$; 3. $\sin \alpha + \cos \alpha$; 4. $\lg 25^\circ + \lg 35^\circ$; 5. $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$

Провери ја точноста на равенствата (6-8)

6. $\lg 20^\circ + 4 \sin 20^\circ = \sqrt{3}$; 7. $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$; 8. $\sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{2\pi}{8} \cdot \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{4}$

Докажи ги идентитетите: 9. $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = 2 \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$; 10. $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - 1} = \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)$

11. Трансформирај ги во збир следниве производи: а) $\sin 15^\circ \cdot \cos 5^\circ$

б) $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$

Докажи ги идентитетите

12. $2 \cos 2\alpha \cdot \cos - \cos 3\alpha = \cos \alpha$

13. $\sin \alpha - 2 \sin(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ) \cdot \cos(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ) = \frac{1}{2}$

14. $\sin^2 \alpha - \sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) \cdot \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{4}$

15. $\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

2.4. ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ

Тригонометриска равенка е равенство во кое непознатата големина се јавува само како аргумент на некоја тригонометриска функција и е точно само за некои определени вредности на аргументот (не е идентитет). На пример, равенките

$$\sin x = \frac{2}{3}; \quad \sin x + 2 \cos x = 1; \quad \sin^2 x + m \operatorname{tg} x = 0$$

се тригонометриски равенки, но равенката

$$5x - \cos x + 1 = 0$$

не е тригонометриска равенка, бидејќи променливата x се содржи и во изразот $5x$.

Наједноставна (основна) тригонометриска равенка е равенката од обликот

$$f(x) = m$$

каде $f(x)$ е некоја од основните тригонометриски функции. Значи, тоа се равенките од видот

$$\sin x = m, \quad \cos x = m, \quad \operatorname{tg} x = m, \quad \operatorname{ctg} x = m \quad (m \in \mathbb{R}). \quad (1)$$

Равенките (1) ги викаме **основни тригонометриски равенки**.

Решение (корен) на дадена тригонометриска равенка претставува секоја вредност на променливата (аргументот) за која равенката е задоволена.

Карактеристично за тригонометриските равенки е тоа што тие или воопшто немаат решенија, или имаат бесконечно множество на решенија (зошто?)

Да се реши дадена тригонометриска равенка, значи да се најдат сите нејзини решенија.

Решавањето на различните типови тригонометриски равенки се засновува на нивно сведување на една од основните тригонометриски равенки (1). Методите со кои дадена тригонометриска равенка се трансформира до равенка од облик (1) се состојат во трансформирање на равенката во еквивалентни на неа равенки. Притоа се користат различни тригонометриски идентитети, зачувувајќи ги општите правила за решавање на равенките. Најчесто, потребно е да се направат повеќе трансформации кои секогаш не водат кон еквивалентни равенки, па поради тоа можат да се појават и нови корени на равенката (на пример, квадрирањето на двете страни на равенката). Затоа е потребно, најденото решение да се провери со замена во почетната равенка.

Поради големата разновидност на тригонометриските равенки, тешко може да се направи нивна класификација.

Најпрвин ќе ги решиме основните тригонометриски равенки, чии решенија треба да ги запамтиш, а потоа низ примери ќе видиме како се решаваат некои видови тригонометриски равенки.

2.4.1. ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ

1. Равенката $\sin x = m$. Видовме дека множеството вредности за функцијата $\sin x$ е интервалот $[-1, 1]$, т.е. за секој $x \in R$ важи $-1 \leq \sin x \leq 1$ или $|\sin x| \leq 1$. Следува, ако $m < -1$ или $m > 1$ ($|m| > 1$) равенката $\sin x = m$ нема смисла, односно нема решение. На пример, равенките: $\sin x = -\frac{3}{2}$ и $\sin x = 2$ немаат решение.

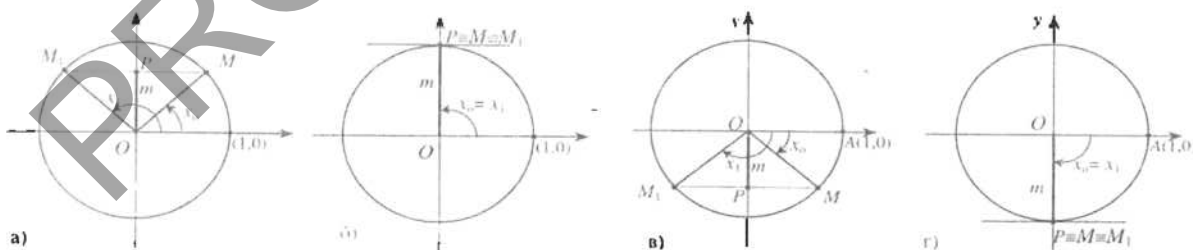
Нека $|m| \leq 1$, т.е. $-1 \leq m \leq 1$. Во т.2.4. видовме дека аглите што ја задоволуваат равенката

$$\sin x = m \quad (2)$$

ги определуваме графички според црт.1. Од црт.1а гледаме дека за $0 \leq m < 1$ постојат два агла x_0 и $x_1 = \pi - x_0$ од интервалот $[0, \pi]$ кои ја задоволуваат равенката (2); ако $-1 < m \leq 0$

тогаш $x_0, x_1 \in [-\pi, 0]$ и $x_1 = -\pi - x_0$ (црт.1в); ако $m = 1$, $x_0 = x_1 = \frac{\pi}{2}$ (црт.1б), а за $m = -1$,

$x_0 = x_1 = -\frac{\pi}{2}$ (црт.1г).



црт.1

Дефиниција. Најмалиот ио айсолутина големина агол што припаѓа на интервалот $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, а е решение на равенката $\sin x = m$, го нарекуваме **главен агол** или **главно решение** и го означуваме со $\arcsin m$ (читаме: аркуссинус од m), т.е.

$$x_0 = \arcsin m \Leftrightarrow \sin(x_0) = m, \quad x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ и } |m| \leq 1.$$

На пример, $\arcsin 0 = 0$, бидејќи $\sin 0 = 0$; $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ бидејќи $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$ бидејќи $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, итн.

Поради периодичноста, решенија на равенката (2) се и сите агли кои се козавршни со x_0 и x_1 , а тоа се:

$$x_0 + 2k\pi; \quad x_1 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (3)$$

Множеството на сите решенија (ошиито решение) за равенката (2) на интервалот $(-\infty, \infty)$ е унијата на решенијата (3), а ќе го запишуваме со формулата:

$$x = [x_0 + 2k\pi, x_1 + 2k\pi; \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{или} \quad x = \begin{cases} x_0 + 2k\pi \\ x_1 + 2k\pi \end{cases}; \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (4)$$

► **Пример 1.** Да ја решиме равенката $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Прво го наоѓаме главното решение. Бидејќи $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, главното решение е $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Другото решение во интервалот $[0, \pi]$ е $x_1 = \pi - x_0 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, а сите решенија ги добиваме според формулата (4): $x = \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \quad (k \in \mathbb{Z}) \right]$ ■

► **Пример 2.** Да ги определиме главно и ошиито решение за равенката $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Решение. Овде е $m = -\frac{1}{2}$. Бидејќи $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, главното решение е $x_0 = -\frac{\pi}{6}$, а $x_1 = -\pi - x_0 = -\pi - (-\frac{\pi}{6}) = -\frac{5\pi}{6}$. Според (4), општото решение е:

$$x = \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \quad (k \in \mathbb{Z}) \right] \quad \blacksquare$$

► **Пример 3.** Да ја решиме равенката $\sin x = 0.7$.

Решение. Со помош на калкулатор го наоѓаме главното решение:

$x_0 = \arcsin 0,7 = 0,77539$, а потоа го наоѓаме и решението $x_1 = \pi - 0,77539$ (во радијанска мера), или во степенска мера $x_0 = \arcsin 0,7 = 44^\circ 25'$ и $x_1 = 180^\circ - 44^\circ 25' = 135^\circ 35'$

Општото решение е: $x = [0,77539 + 2k\pi, (\pi - 0,77539) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ (во радијани) или $x = [44^\circ 25' + k \cdot 360^\circ, 135^\circ 35' + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ (во степени) $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ■

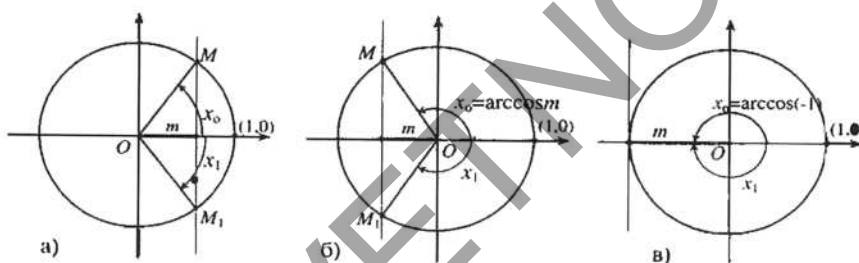
2. Равенката $\cos x = m$. Се она што кажавме во однос на вредноста на константата m и изборот на интервалот во кој ќе ги бараме основните решенија за равенката $\sin x = m$, важи и за равенката

$$\cos x = m \quad (5)$$

За $|m| > 1$ равенката (5) нема решение, бидејќи $-1 \leq \cos x \leq 1$, односно $|\cos x| \leq 1$, (црт.2).

Нека $|m| \leq 1$. Аглите што ја задоволуваат равенката (1) ги определуваме графички според црт.1 (обиди се да ја образложиш постапката).

Од цртежот гледаме дека за дадена вредност m постојат два агла чиј косинус е еднаков на m , тоа се: x_0 и $x_1 = -x_0$. Од тие два агла, ненегативниот агол x_0 е во интервалот $[0, \pi]$, а x_1 е во интервалот $[-\pi, 0]$, при што ако $0 < m < 1$, аголот x_0 е остар агол (агол од I квадрант) (црт.2 а), а ако $-1 < m < 0$, тогаш x_0 е тап агол (агол во II квадрант) (црт.2б). Ако $m = 1$, тогаш $x_0 = x_1 = 0$, а за $m = -1$, $x_0 = \pi$, $x_1 = -\pi$ (црт.2в)



црт.2

Дефиниција. Нормалниот позитивен агол x_0 е во интервалот $[0, \pi]$ и ја задоволува равенката $\cos x = m$ го викаме **главен агол** или **главно решение** на равенката и го означуваме со $\arccos m$ (читаме: аркус косинус од m), т.е.

$$x_0 = \arccos m \Leftrightarrow \cos x_0 = m, x_0 \in [0, \pi] \text{ и } |m| \leq 1.$$

На пример, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ бидејќи $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\arccos 1 = 0$ бидејќи $\cos 0 = 1$; $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ бидејќи $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, итн.

Поради периодичноста на косинусот, множеството од сите решенија (општо решение) на равенката (1) е дадено со:

$$x_k = \pm x_0 + 2k\pi \quad \text{односно} \quad x_k = \pm \arccos m + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

► **Пример 4.** Да ја решиме равенката $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Бидејќи $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, следува дека главното решение е $x_0 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, а општото решение, согласно со формулата (6), е $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ■

3. Равенката $\operatorname{tg} x = m$. Видовме дека множеството на вредности на тангенсот е интервалот $(-\infty, \infty)$, што значи дека m може да биде кој било реален број.

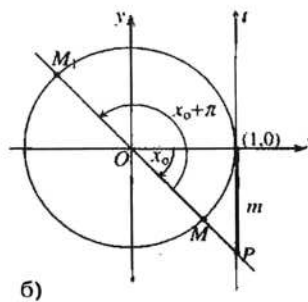
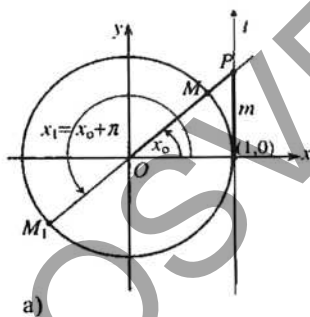
Според дефиницијата на тангенсот во тригонометриската кружница, главното решение на равенката го определуваме графички според црт.3

Од двете дијаметрално спротивни точки M и M_1 со кои е определен аголот (лакот) што има тангенс еднаков на m , првата е на десната, а втората на левата полукружница.

Дефиниција. Аголот x_0 во интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ што ја задоволува равенката $\operatorname{tg} x = m$ е **главно решение** (главен агол) на равенката $\operatorname{tg} x = m$ и го означуваме со $\operatorname{arctg} m$ (читаме: аркустангенс од m), т.е.

$$x_0 = \operatorname{arctg} m \Leftrightarrow \operatorname{tg} x_0 = m \text{ и } x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), m \in (-\infty, \infty),$$

Ако $m \geq 0$, тогаш $0 \leq x_0 < \frac{\pi}{2}$; а за $m < 0$, $-\frac{\pi}{2} < x_0 < 0$.



црт.3

На пример, $\operatorname{arctg} 0 = 0$ бидејќи $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ бидејќи $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$, итн.

Поради периодичноста, множеството од сите решенија (општото решение) го добиваме според формулата

$$x = x_0 + k\pi = \operatorname{arctg} m + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Ако k е парен број, т.е. $k=2n$, се добиваат аглите (лаковите) што завршуваат во иста точка како и $x_0 = \operatorname{arctg} m$, а ако k е непарен број, $k=2n+1$, се добиваат аглите (лаковите) што завршуваат во дијаметрално спротивната точка.

► **Пример 5.** Да ги решиме равенките: а) $\operatorname{tg} x = 1$; б) $\operatorname{tg} x = -2,5$.

Решение. а) Главното решение е $x_0 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, а општото решение е

$$x = x_0 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

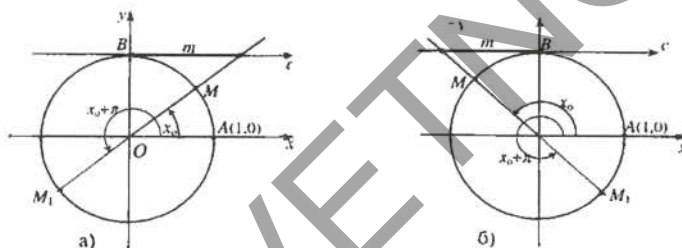
б) За главното решение, со калкулатор наоѓаме: $x_0 = \operatorname{arctg}(-0,25) = 68,198^\circ = -68^\circ 11' 52''$ или во радијани $x_0 = -1,1902$. Општото решение е $x = -68,198^\circ + k \cdot 180^\circ$ или во радијани $x = -1,1902 + k\pi$ ■

4. Равенката $\operatorname{ctg} x = m$, $m \in (-\infty, \infty)$. Решенијата на оваа равенка ги определуваме графички според црт.4.

Дефиниција. Аголот (лакот) x_0 од интервалот $(0, \pi)$ што ја задоволува равенката $\operatorname{ctg} x = m$ го викаме **главен агол** или **главно решение** за равенката $\operatorname{ctg} x = m$, и го означуваме со $x_0 = \operatorname{arccctg} m$ (читаме: аркускојтангенс од m), т.е.

$$x_0 = \operatorname{arccctg} m \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x_0 = m, \quad x_0 \in (0, \pi), \quad m \in (-\infty, \infty).$$

Ако $m \geq 0$, тогаш $0 < x_0 \leq \frac{\pi}{2}$, а за $m < 0$, $-\frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$.



црт.4

Множеството од сите решенија (општите решение) е дадено со формулата:

$$x = x_0 + k\pi = \operatorname{arccctg} m + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

► **Пример 6.** Да ги решиме равенките: а) $\operatorname{ctg} x = 1$; б) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Решение. а) Главното решение е $x_0 = \operatorname{arccctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, бидејќи $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$, а општото решение е $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ ■

б) Главното решение е $x_0 = \operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, бидејќи $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$;

општото решение е $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ ■

ЗАДАЧИ

1. Кои од следниве равенки немаат решение:

а) $\sin x = \frac{2}{3}$; б) $\cos x = \sqrt{2}$; в) $2\sin x = \sqrt{5}$; г) $\lg x = 1,2$; д) $\operatorname{ctg} x = 0$; е) $\frac{1}{2}\cos x = 1$

Реша ги основните тригонометриски равенки:

2. а) $\sin x = 0$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin x = \frac{3}{4}$. 3. а) $\cos x = 1$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos x = -0,8$.

4. а) $\lg x = \sqrt{3}$; б) $\lg x = -1$; в) $\lg x = 1,3$. 5. а) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{ctg} x = -1$; в) $\operatorname{ctg} x = -3$

Реша ги тригонометриските равенки:

6. $\sin x = \sin(-15^\circ)$ 7. $\cos x = \cos \frac{\pi}{18}$ 8. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7}$ 9. $\sin x = \cos \frac{5\pi}{6}$

2.4.2. РЕШАВАЊЕ НА НЕКОИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ

1. Равенките од видот

$$a \sin(bx + c) + d = 0, \quad a \neq 0, b \neq 0, \quad (1)$$

ги решаваме така што со смената $bx + c = t$, ги трансформираме до основната тригонометриска равенка $\sin t = -\frac{d}{a}$, која веќе видовме како се решава. На ист начин ги решаваме и равенките од видот (1) во кои наместо функцијата синус, се јавуваат функциите косинус, тангенс или котангенс, односно равенките од видот:

$$a \cos(bx + c) + d = 0, \quad a \lg(bx + c) + d = 0, \quad a \operatorname{ctg}(bx + c) + d = 0, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

➤ **Пример 1.** Да ја решиме равенката $\sqrt{2} \sin x - 1 = 0$.

Решение. Имаме $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, за која општото решение е:

$$x = \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \right]$$

➤ **Пример 2.** Да ја решиме равенката $2 \sin 5x + 1 = 0$

Решение. Прво ја запишуваме равенката во вид $\sin 5x = -\frac{1}{2}$, а потоа со смената

$$5x = t, \text{ ја трансформираме во равенката } \sin t = -\frac{1}{2}, \text{ за која решенијата се } t = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \\ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ако се вратиме на првобитната променлива, т.е. наместо t замениме $5x$, а потоа двете страни ги поделиме со 5, ги добиваме решенијата на равенката:

$$x = \begin{cases} \frac{1}{5}(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi); \\ \frac{1}{5}(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi); \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{односно} \quad x = \begin{cases} -\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}; \\ -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$

➤ **Пример 3.** Да ја решиме равенката $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

Решение. Со смената $2x + \frac{\pi}{3} = t$ дадената равенка ја запишуваме во вид $\sin t = \frac{1}{2}$ за

која општото решение е: $t = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \\ (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$. Ако наместо t замениме

$2x + \frac{\pi}{3}$ и добиените равенства ги решиме по x го добиваме бараното решение:

$$2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \\ \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \\ \frac{3\pi}{6} + 2k\pi; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{односно} \quad x = \begin{cases} -\frac{\pi}{12} + k\pi; \\ \frac{3\pi}{12} + k\pi; \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \blacksquare$$

2. Примери на равенки кои се трансформираат во равенки од претходниот вид

➤ **Пример 4.** Да ја решиме равенката: $\sin^2 x + \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x$.

Решение. На прв поглед, како што е зададена равенката не е од претходниот вид, но, со едноставни трансформации, земајќи ги предвид веќе познатите идентитети, имаме по ред:

$$\sin x \cos x = 1 - \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x = 1 - (\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x = 0: \sin 2x = 0, \quad 2x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{односно} \quad x = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \blacksquare$$

➤ **Пример 5.** Да ја решиме равенката $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$

Решение. Ја трансформираме најпрвин левата страна на равенката:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$$

по што дадената равенка ја запишуваме во вид $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

Решението на оваа равенка е: $x = \frac{1}{2}(\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi) = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \blacksquare$

Забелешка. Најчесто постапката за трансформирање на дадена тригонометриска равенка не е единствена. Зависно од тоа кои релации помеѓу тригонометриските функции ќе ги искористиме, равенката може да ја сведеме до равенки од различен вид.

➤ **Пример 6.** Да ја решиме равенката $\cos 2x + \cos^2 x = 2$.

Решение. I начин. Заменуваме $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и ги добиваме по ред равенките:

$$3\cos^2 x = 3, \quad \cos^2 x = 1, \quad \cos x = \pm 1$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна на вкупноста равенки:

$$1. \cos x = -1, \quad x = (2k+1)\pi \quad 2. \cos x = 1, \quad x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Следува, решение на дадената равенка е унијата од сите решенија, односно решение е множеството:

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

II начин. Заменуваме $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ и добиваме по ред:

$$\cos 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} = 2, \quad 3\cos 2x + 1 = 4, \quad 3\cos 2x = 3, \\ \cos 2x = 1$$

Решение на последната равенка е $2x = 2k\pi$, односно $x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ ■

Еден практичен метод за решавање на тригонометриските равенки е дадената равенка со различни тригонометриски трансформации да ја сведеме на видот:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_k(x) = 0$$

каде $f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$ се тригонометриски равенки од основен вид или од од претходно разгледаниот вид (1). Множеството решенија на дадената равенка е унијата од решенијата на равенките $f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$.

➤ **Пример 7.** Да ја решиме равенката $\sin 2x = \cos^2 x$.

Решение. Заменувајќи $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ равенката ја запишуваме во вид

$$2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0, \quad \text{т.е.} \quad \cos x(2\sin x - \cos x) = 0$$

Последната равенка е еквивалентна на вкупноста од равенките

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad 2\sin x - \cos x = 0.$$

Решенијата на првата равенка се: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Втората равенка по делењето со $\cos x \neq 0$ (зошто?) поминува во равенката $\tan x = \frac{1}{2}$, чие решение е $x = \arctg \frac{1}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. Решението на дадена равенка е вкупноста:

$$x = \left[(2k+1)\frac{\pi}{2}; \arctg \frac{1}{2} + k\pi \right] = \left[(2k+1)\frac{\pi}{2}; 0.463 + k\pi \right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \blacksquare$$

➤ **Пример 8.** Да ја решиме равенката $\sin 7x - \cos 4x = \sin x$.

Решение. Ја запишуваме равенката во вид:

$$(\sin 7x - \sin x) - \cos 4x = 0$$

Применувајќи ја формулата за трансформирање (S-S) добиваме по ред:

$$2 \sin \frac{7x-x}{2} \cos \frac{7x+x}{2} - \cos 4x = 0, \quad 2 \sin 3x \cos 4x - \cos 4x = 0, \quad \cos 4x(2 \sin 3x - 1) = 0.$$

Последната равенка е еквивалентна на вкупноста $\begin{cases} \cos 4x = 0 \\ 2 \sin 3x - 1 = 0 \end{cases}$, од каде решението на дадената равенка е множеството:

$$x = \left[\frac{(2k+1)\pi}{8}; \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \blacksquare$$

3. Равенки кои со трансформација и погодна смена се сведуваат на алгебарска квадратна равенка во однос на една тригонометриска функција од еден ист аргумент

Ова се равенки кои со еквивалентни трансформации се сведуваат на равенки од видот:

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0, \quad a \cos^2 x + b \cos x + c = 0, \quad a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

Сите овие случаи доведуваат до решавање на два вида равенки:

1. решавање на алгебарска равенка од II степен во однос на непознатата

$$\sin x = t, \cos x = t \text{ или } \operatorname{tg} x = t$$

2. решавање на тригонометриски равенки од основен вид $\sin x = m$, $\cos x = m$ или $\operatorname{tg} x = m$, каде m е корен на алгебарската равенка, а чиј број зависи од бројот на корените на соодветната алгебарска равенка.

➤ **Пример 9.** Да ја решиме равенката: $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Решение. Ако ставиме $\sin x = t$ добиваме квадратна равенка во однос на променливата t :

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

Корените на оваа равенка се: $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{1}{2}$, па дадената равенка е еквивалентна со вкупноста од двете основни тригонометриски равенки:

$$\sin x = -1 \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

чиј решенија се: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и $x = \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Според тоа,

решението на дадената равенка е вкупноста $x = \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \blacksquare$

➤ **Пример 10.** Да ја решиме равенката: $2 \sin^2 x + \cos x - 1 = 0$

Решение. Ако замениме $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ дадената равенка ја трансформираме во равенката $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, а оваа со смена $\cos x = t$ ја сведуваме на квадратната равенка $2t^2 - t - 1 = 0$, чиј корени се $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Значи, дадената равенка е еквивалентна на вкупноста од равенките

$$\cos x = 1 \quad \text{и} \quad \cos x = -\frac{1}{2},$$

за кои решенијата се: $x = \pm \arccos 1 + 2k\pi = 2k\pi$ и $x = \pm \arccos(-\frac{1}{2}) + 2k\pi = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, па

решението на дадената равенка е вкупноста
$$x = \begin{cases} 2k\pi; \\ \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \blacksquare$$

➤ **Пример 11.** Да ја решиме равенката $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$.

Решение. Ако во дадената равенка замениме $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ја добиваме равенката:

$$6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$$

од каде наоѓаме $(\sin x)_1 = -\frac{1}{2}$ и $(\sin x)_2 = \frac{4}{3}$. Бидејќи $\frac{4}{3} > 1$ втората равенка нема решение.

Според тоа решението на равенката е вкупноста
$$x = \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \blacksquare$$

➤ **Пример 12.** Да ја решиме равенката $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Решение. Ако двете страни на равенката ги поделиме со $\cos^2 x \neq 0$ ја добиваме равенката $3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2\sqrt{3}\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$, односно $3\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

Корените на оваа равенка се: $(\operatorname{tg} x)_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{6}$ односно

$$(\operatorname{tg} x)_1 = \sqrt{3}; \quad (\operatorname{tg} x)_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Следува, решение на дадената равенка е вкупноста: $x = \left[\frac{\pi}{3} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi, \right] \quad k \in \mathbb{Z} \blacksquare$

➤ **Пример 13.** Да ја решиме равенката $\sin x + \sin 4x + \sin 7x = 0$.

Решение. Според формулата $(C+C)$ за трансформирање на збир на синуси во производ имаме:

$$\sin x + \sin 7x = 2\sin 4x \cos 3x$$

па дадената равенка можеме да ја запишеме во вид:

$$\sin 4x \cdot (1 + 2\cos 3x) = 0,$$

која е еквивалентна на вкупноста равенки

$$\begin{cases} \sin 4x = 0, \\ 1 + 2\cos 3x = 0. \end{cases}$$

Решението на оваа вкупност е $x = \left[\frac{k\pi}{4}; \frac{6k \pm 2\pi}{9}, \right] \quad k \in \mathbb{Z}$, што претставува решение и на дадената равенка $\blacksquare$

➤ **Пример 14.** Да ја решиме равенката $\cos x \cdot \cos 5x = 1$

Решение. Бидејќи $\cos t \in [-1, 1]$, дадената равенка е задоволена само за оние реални броеви x за кои е истовремено

$$\text{I. } \cos x = 1 \text{ и } \cos 5x = 1 \text{ или II. } \cos x = -1 \text{ и } \cos 5x = -1.$$

Во првиот случај решението е:

$$x = 2k\pi, \quad 5x = 2m\pi, \quad k, m \in \mathbb{Z}, \text{ односно } x = 2k\pi, \quad x = \frac{2m\pi}{5}.$$

Заедничкото решение го наоѓаме од условот $2k\pi = \frac{2m}{5}\pi$. од каде $m = 5k$, па добиваме

$$x = \frac{2 \cdot 5k}{5}\pi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{I})$$

Во вториот случај: $x = (2k-1)\pi$, $5x = (2m-1)\pi$, $k, m \in \mathbb{Z}$. Слично како и во првиот случај наоѓаме дека

$$x = (2k-1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{II})$$

Од (I) и (II) следува дека сите решенија на дадената равенка се $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

ЗАДАЧИ

Реши ги следниве тригонометриски равенки:

1. а) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; б) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$

2. а) $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = 0.5$; б) $\operatorname{tg}(x - 25^\circ) = 1$; в) $\sqrt{2} \cos(x - 45^\circ) = 1$.

3. а) $\sin(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}) = 1$; б) $\operatorname{tg}(\frac{x}{4} + 10^\circ) = -1$; в) $2 \cos 2x + \sqrt{3} = 0$

Со воведување на нова непозната реши ги тригонометриските равенки:

4. $6 \sin^2 x - 7 \sin x + 2 = 0$;

5. $\cos^2 x + \cos x = 0$;

6. $3 \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$;

7. $3 \operatorname{ctg}^2 2x - 8 \operatorname{ctg} 2x = -5$

Со погодни трансформации реши ги тригонометриските равенки:

8. $4 \cos^2 x + 4 \cos x + \sin^2 x = 0$;

9. $\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x = 5$;

10. $\frac{5 + \operatorname{tg} x}{1 + 2 \operatorname{tg} x} - \frac{15 + \operatorname{tg} x}{3 - \operatorname{tg} x} = 0$;

11. $4 \cos^4 x - 7 \cos^2 x + 3 = 0$;

12. $\sin x + \sqrt{3 + \sin^2 x} = 3$;

13. $\sin 2x - \sin x = 0$;

14. $\sin 2x - \operatorname{tg} x = 0$;

15. $\sin x + \sin 3x = 0$

2.5. РЕШАВАЊЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Да се потсетиме!

Во триаголникот имаме 6 основни елементи, а тоа се страните и аглите.

Да се реши некој триаголник, значи, со одреден (минимален) број зададени елементи да се одредат сите негови основни елементи.

Триаголникот е еднозначно определен ако се познати три основни елементи од кои барем еден е страна. Да се реши триаголникот, значи, со три дадени елементи (од кои барем еден е страна) да се определат преостанатите три основни елементи.

Минатата учебна година се запознавме со четирите основни задачи со кои го решаваме правоаголниот триаголник. Во случај на произволен триаголник, четирите основни задачи за решавање на триаголникот се:

Задача I. Да се реши триаголникот ако се дадени една страна и два агла;

Задача II. Да се реши триаголникот ако се дадени две страни и аголот наспроти поголемата страна;

Задача III. Да се реши триаголникот ако се дадени две страни и аголот меѓу нив;

Задача IV. Да се реши триаголникот ако се дадени должините на сите страни.

Овие четири задачи ги решаваме врз основа на две теореми познати како **синусна теорема** и **косинусна теорема**.

По договор, во даден триаголник ABC страните ќе ги означуваме со a, b, c , а аглите спроти овие страни со α, β, γ соодветно.

2.5.1. СИНУСНА ТЕОРЕМА

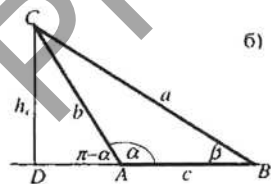
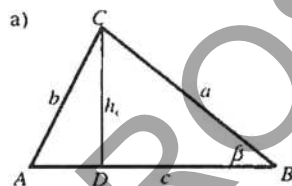
Теорема. Во секој триаголник страните се пропорционални на синусите на спротивните агли:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

и важи

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

каде R е радиус на кружницата опишана околу дадениот триаголник.



црт. 1

Доказ. Во триаголникот ABC ја повлекуваме висината h_c кон страната c (црт.1а). Од правоаголните триаголници ADC и DBC на црт.1а имаме:

$$h_c = b \sin \alpha \text{ и } h_c = a \sin \beta \quad (1)$$

Ако триаголникот е тупоаголен и висината е надвор од триаголникот (црт.1б), важат истите равенства (1):

$$\text{од } \triangle ADC: h_c = b \sin(180^\circ - \alpha) = b \sin \alpha, \text{ а}$$

$$\text{од } \triangle DBC: h_c = a \sin \beta.$$

Понатаму, од равенствата (1) добиваме

$$b \sin \alpha = a \sin \beta.$$

од каде пак следува

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta \text{ односно } a : \sin \alpha = b : \sin \beta \quad (2)$$

Аналогно, ако ја повлечеме висината h_a ќе покажеме дека (провери)

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma, \quad \text{односно} \quad b : \sin \beta = c : \sin \gamma \quad (3)$$

Од (2) и (3) следува $a : \sin \alpha = b : \sin \beta = c : \sin \gamma$ односно

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Треба да покажеме уште дека овие односи се еднакви на дијаметарот на опишаната кружница околу триаголникот. За таа цел околу триаголникот ABC опишуваме кружница $k(O, R)$. За еден од внатрешните агли, на пример α , се можни три случаи:

I. α е остар агол; II. α е тап агол; III. α е прав агол.

Ќе покажеме дека во секој од трите случаи важи

$$a = 2R \sin \alpha \quad \text{односно} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2R. \quad (4)$$

I случај. Нека $\angle \alpha$ е остар агол (црт.2). Низ едно од другите две темиња, на пример низ B , го повлекуваме дијаметарот на опишаната кружница k и го разгледуваме помошниот триаголник A_1BC кој е правоаголен (Талесова теорема). Притоа имаме: $\angle BAC = \angle BA_1C$, односно $\alpha = \alpha_1$ (како перифериски агли над ист лак BC). Од правоаголниот триаголник A_1BC имаме:

$$\frac{a}{2R} = \sin \alpha_1 = \sin \alpha.$$

од каде следува (4).

II случај. Нека $\angle \alpha$ е тап (црт.3). Со конструкција како и во претходниот случај го добиваме тетивниот четириаголник ABA_1C , во кој важи:

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ \quad \text{т.е.} \quad \alpha_1 = 180^\circ - \alpha.$$

Од правоаголниот триаголник A_1CB имаме:

$$\frac{a}{2R} = \sin \alpha_1 = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

од каде следува:

$$a = 2R \sin \alpha.$$

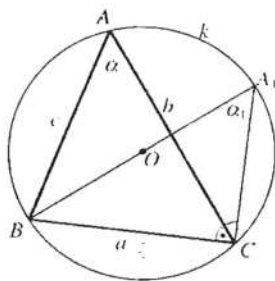
III случај. Нека $\alpha = 90^\circ$ (црт.4). Тогаш

$$a = 2R = 2R \sin \frac{\pi}{2} = 2R \sin \alpha.$$

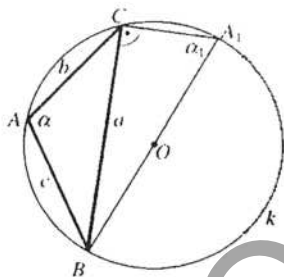
Аналогно се покажува дека и за аглите β и γ важат равенствата

$$b = 2R \sin \beta, \quad \text{односно} \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2R,$$

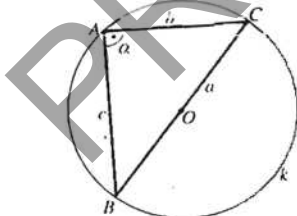
$$c = 2R \sin \gamma, \quad \text{односно} \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad \blacklozenge$$



црт.2

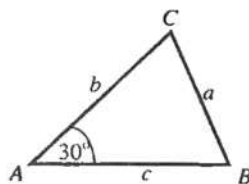


црт.3



црт.4

➤ **Пример 1.** Да докажеме дека во триаголник во кој едниот агол е 30° сиранијата што лежи спроти него е еднаква на радиусот на опишаната кружница околу тој триаголник.



црт.5

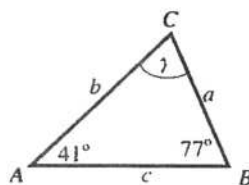
Решение. Од синусната теорема, според цртежот 5, имаме:

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

од каде

$$a = 2R \sin 30^\circ = 2 \cdot R \cdot \frac{1}{2} = R \quad \blacksquare$$

➤ **Пример 2.** Во триаголникот ABC (црт.6) се дадени аглиите: $\alpha = 41^\circ$, $\beta = 77^\circ$ и сиранијата $a = 74$. Да ги определиме аголот γ и сираниите b и c .



црт.6

Решение. Бидејќи ни се дадени два агла и една страна, решавајќи го триаголникот ABC всушност, ќе ја решиме основната **Задача I**.

Од $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, имаме:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (41^\circ + 77^\circ) = 62^\circ.$$

Од синусната теорема имаме $\frac{74}{\sin 41^\circ} = \frac{b}{\sin 77^\circ} = \frac{c}{\sin 62^\circ}$ од каде наоѓаме:

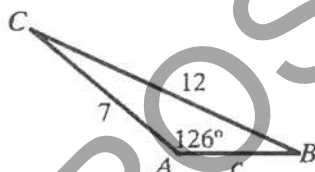
$$b = \frac{74 \sin 77^\circ}{\sin 41^\circ} = \frac{74 \cdot 0,97437}{0,65605} = \frac{72,10338}{0,65605} = 109,9 \quad \text{и} \quad c = \frac{74 \sin 62^\circ}{\sin 41^\circ} = \frac{74 \cdot 0,88294}{0,65605} = \frac{65,33812}{0,65605} = 99,59 \quad \blacksquare$$

➤ **Пример 3.** Да провериме дали е определен триаголник ако ни се дадени:

а) аголот $\alpha = 126^\circ$ и страните $a = 12$ и $b = 7$;

б) аголот $\alpha = 30^\circ$ и страните $a = 10$, $b = 20$

Решение. а) Дадени ни се две страни и аголот спроти поголемата страна. Треба да ја решиме основната **Задача II**.



црт.7

Да претпоставиме дека со дадените основни елементи е определен триаголникот ABC (црт.7). Од синусната теорема имаме:

$$\frac{12}{\sin 126^\circ} = \frac{7}{\sin \beta},$$

Ако ова равенство го решиме по $\sin \beta$ ја добиваме равенката:

$$\sin \beta = \frac{7 \cdot \sin 126^\circ}{12} = \frac{7 \cdot 0,80901}{12} = \frac{5,66311}{12} = 0,47192$$

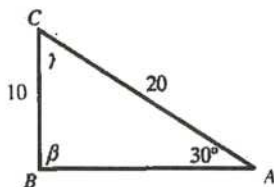
чиј решенија во интервалот $(0, \pi)$ се: $\beta_1 = 28,2^\circ$ и $\beta_2 = 151,8^\circ$. Второто решение β_2 не одговара на условот на задачата, бидејќи триаголникот не може да има два тапи агла. Значи, $\beta = 28,2^\circ$ е единствен агол што одговара на условите на задачата.

Сега го определуваме и аголот γ : $\gamma = 180^\circ - (126^\circ + 28,2^\circ) = 25,8^\circ$.

Третата страна c ја наоѓаме од равенството: $\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}$, односно

$$\frac{c}{\sin 25,8^\circ} = \frac{12}{\sin 126^\circ}, \text{ од каде добиваме } c = \frac{12 \cdot \sin 25,8^\circ}{\sin 126^\circ} = \frac{12 \cdot 0,43523}{0,80901} = \frac{5,22277}{0,80901} = 6,5.$$

Значи со дадените елементи е определен еден единствен триаголник.



црт.8

б) На ист начин како и во претходниот случај наоѓаме (црт.8):

$$\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 20 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{10} = 20 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Следува $\beta = 90^\circ$, што значи дека триаголникот е правоаголен триаголник, со хипотенуза $b = 20$. Така имаме: $\gamma = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, а третата страна c ја наоѓаме со Питагоровата теорема: $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ ■

➤ **Пример 4.** Да провериме дали е определен триаголник ABC при дадени:

а) страни $a = 95$, $b = 117$ и агол $\alpha = 65^\circ$; б) страни $a = 10$, $b = 11$ и агол $\alpha = 57^\circ$.

Решение. а) Од синусната теорема имаме $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$ или $\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a}$, од каде

наоѓаме $\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 117 \cdot \frac{\sin 65^\circ}{95} = 1,116 > 1$, а оваа равенка нема решение. Значи, со дадените елементи не е определен триаголник, односно задачата нема решение.

б) Како под а) наоѓаме $\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 11 \cdot \frac{\sin 57^\circ}{10} = 0,922 < 1$. Решенијата на равенката $\sin \beta = 0,9225$ се: $\beta_1 = \arcsin 0,922 = 67,30^\circ$ и $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 180^\circ - 67,30^\circ = 112,70^\circ$.

За $\beta_1 = 67,30^\circ$ добиваме триаголник AB_1C (црт.9) со агли $\alpha, \beta_1, \gamma_1$ и страни a, b, c_1 , при што

$$\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta_1) = 180^\circ - (57^\circ + 67,30^\circ) = 55,70^\circ,$$

а страната c_1 ја наоѓаме од условот

$$\frac{c_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{\sin \alpha} \text{ т.е. } c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin 55,70^\circ}{\sin 57^\circ} = 9,85.$$

црт.9

За решението $\beta_2 = 112,70^\circ$ добиваме триаголник AB_2C (црт.9) со агли $\alpha, \beta_2, \gamma_2$ и страни a, b, c_2 каде $\gamma_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta_2) = 180^\circ - (57^\circ + 112,70^\circ) = 10,30^\circ$, а за c_2 имаме:

$$\frac{c_2}{\sin \gamma_2} = \frac{a}{\sin \alpha} \text{ т.е. } c_2 = \frac{a \sin \gamma_2}{\sin \alpha} = \frac{10 \sin 10,30^\circ}{\sin 57^\circ} = 2,132.$$

Значи, со дадените елементи се определени два различни триаголника ■

➤ **Пример 5.** Да го определиме триаголникот ABC ако $a = 70$, $b = 65$ и аголот $\alpha = 40^\circ$.

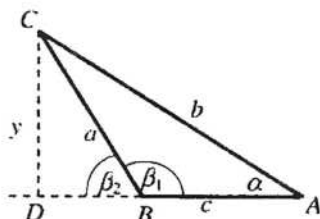
Решение. Овде $\sin \beta = b \cdot \frac{\sin \alpha}{a} = 65 \cdot \frac{\sin 40^\circ}{70} = 0,5969 < 1$, од каде наоѓаме

$$\beta_1 = \arcsin 0,5969 = 36,65^\circ \text{ и } \beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 143,35^\circ$$

Бидејќи $\alpha + \beta_2 = 40^\circ + 143,35^\circ > 180^\circ$, решението β_2 не определува триаголник.

Опреди го триаголникот за решението $\beta = \beta_1$ ($\gamma = 103,35^\circ$, $c = 106$) ■

► **Пример 6.** Да докажеме: ако се $0 < \beta_1 < 90^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$, тогаш $90^\circ < \beta_2 < 180^\circ$ и $\sin \beta_2 = \sin \beta_1$.



црт.10

Решение. Нека β_2 е агол во триаголникот ABC (црт.10). Според цртежот,

$$y = a \sin \beta_1 \text{ (од } \triangle BCD) \quad (1)$$

$$y = b \sin \alpha \text{ (од } \triangle ACD). \quad (2)$$

Од друга страна, според синусната теорема за $\triangle ABC$:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta_2} \quad (3)$$

Од (1), (2) и (3) имаме: $a \sin \beta_1 = b \sin \alpha$ и $a \sin \beta_2 = b \sin \alpha$. од каде следува $\sin \beta_1 = \sin \beta_2$ ■

ЗАДАЧИ

Реша го триаголникот ABC ако:

1. $a = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$;

2. $b = \sqrt{6}$, $c = 2\sqrt{3}$, $\beta = 30^\circ$;

3. $R = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$;

4. $R = 2\sqrt{6}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$;

5. Пресметај го периметарот и плоштината на паралелограмот ABCD ако

$$\overline{AB} = 8, \overline{BD} = 13 (=d_1), \alpha = 60^\circ$$

2.5.2. КОСИНУСНА ТЕОРЕМА

Теорема. Во секој триаголник квадратиот на една нејова страна е еднаков на збирот од квадратите на другите две страни, минус удвоениот производ на нивне страни и косинусот на аголот помеѓу нив. Значи, точно се равенствата:

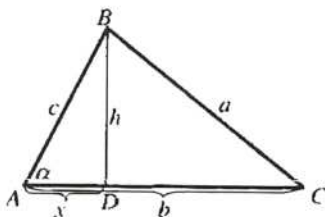
$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Доказ. Треба да ги разгледаме случаите кога аголот е остар, тап или прав.

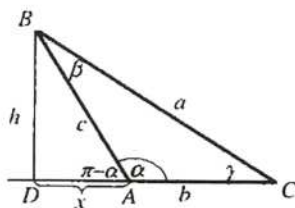
1 случај. Нека аголот α е остар, т.е. $0 < \alpha < 90^\circ$ (црт.1). Од триаголникот BDC, според Питагоровата теорема $a^2 = h^2 + (b-x)^2$, а од триаголникот BDA:

$$h^2 = c^2 - x^2 \text{ и } x = c \cos \alpha.$$

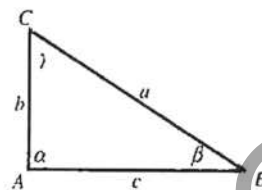
Следува, $a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2bx$ односно $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.



црт.1



црт.2



црт.3

II случај. Нека $\alpha > 90^\circ$ (црт.2). Од триаголникот BDC имаме

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2,$$

а од триаголникот BDA : $h^2 = c^2 - x^2$ и $x = c \cos(\pi - \alpha) = -c \cos \alpha$, од каде следува

$$a^2 = h^2 + b^2 + x^2 + 2bx = c^2 - x^2 + b^2 + x^2 + 2bx = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha.$$

III случај. Нека $\alpha = 90^\circ$. Според црт.3 имаме $a^2 = b^2 + c^2$, од каде следува

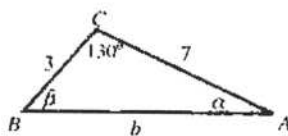
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Забележуваме дека кога аголот е 90° , тогаш косинусната теорема поминува во Питагоровата теорема.

Анологно се докажуваат и другите две равенства од (II) ♦

Низ неколку примери ќе видиме како со помош на косинусната теорема ги решаваме основните Задачи III и IV за произволен триаголник.

➤ **Пример 1.** Да го решиме триаголникот ABC ако ни се дадени должините на две страни: $a = 3\text{см}$, $b = 7\text{см}$ и аголот помеѓу нив $\gamma = 130^\circ$.



црт.4

Решение. Според дадените елементи, треба да ја решиме задачата III. Бидејќи ни се дадени две страни во триаголникот и аголот помеѓу нив, употребувајќи ја косинусната теорема веднаш можеме да ја најдеме третата страна во триаголникот. Според ознаките на црт.4 имаме:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 130^\circ = 85.0,$$

од каде $c = \sqrt{85.0} \approx 9.22\text{см}$. Сега можеме да ги најдеме и преостанатите агли во триаголникот. Од равенството $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, решено по $\cos \alpha$, имаме:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Ако во овој израз ги замениме a , b , c со нивните вредности добиваме:

$$\cos \alpha = \frac{7^2 + 9.22^2 - 3^2}{2 \cdot 7 \cdot 9.22} = \frac{125.00}{129.08} = 0.968,$$

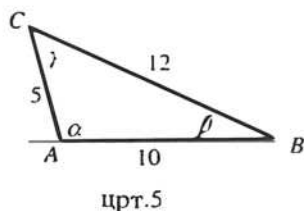
од каде следува

$$\alpha = \arccos 0.968 = 14.53^\circ = 14^\circ 31' 48''$$

и

$$\beta = 180^\circ - (14.53^\circ + 130^\circ) = 35.07^\circ = 35^\circ 4' \blacksquare$$

➤ **Пример 2.** Должините на страните во триаголникот се 5, 10 и 12. Да го решиме триаголникот.



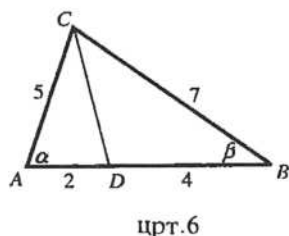
Решение. Имаме да ја решиме основната Задача IV. Според ознаките на црт. 5 имаме:

$$1. \cos \alpha = \frac{5^2 + 10^2 - 12^2}{2 \cdot 5 \cdot 10} = -0.19 \Rightarrow \alpha \approx 101.0^\circ$$

$$2. \cos \beta = \frac{12^2 + 10^2 - 5^2}{2 \cdot 12 \cdot 10} = 0.9125 \Rightarrow \beta \approx 24.1^\circ$$

$$3. \gamma \approx 180^\circ - (101.0^\circ + 24.1^\circ) = 54.9^\circ \blacksquare$$

➤ **Пример 3.** За триаголникот ABC на црт.14 да ја определиме должината на отсечката CD.



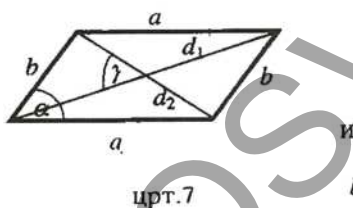
Решение. Најпрвин, од косинусната теорема за триаголникот ABC (црт.6) наоѓаме:

$$\cos \alpha = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = 0.2,$$

а потоа ја применуваме косинусната теорема за триаголникот ADC од каде добиваме:

$$\overline{CD}^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 0.2 = 25 \quad \text{т.е.} \quad \overline{CD} = \sqrt{25} = 5 \blacksquare$$

➤ **Пример 4.** Двејте страни на паралелограмот се $a=4$ и $b=3$, а аголот помеѓу нив $\alpha=45^\circ$. Да го пресметаме аголот γ помеѓу дијагоналиите.



Решение. Според означувањата на црт.7 имаме:

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \quad (1)$$

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \alpha) \quad (2)$$

$$b^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cos \gamma \quad \text{т.е.} \quad b^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{4} - \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cos \gamma$$

од каде согласно со (1) и (2):

$$\cos \gamma = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \alpha}}$$

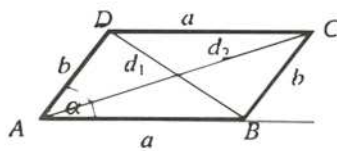
Ако во последниот израз замениме $a=4, b=3, \alpha=45^\circ$, добиваме

$$\cos \gamma = \frac{4^2 - 3^2}{\sqrt{(4^2 + 3^2)^2 - 4 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cos^2 45^\circ}} = \frac{7}{\sqrt{4^4 + 3^4}} = \frac{7}{\sqrt{337}} = \frac{7}{18.36} = 0.38$$

од каде наоѓаме

$$\gamma = \arccos 0.38 = 67.7^\circ \blacksquare$$

➤ **Пример 5.** Да покажеме дека за произволен паралелограм збиорот од квадратите на дијагоналиите е еднаков на збиорот од квадратите на страните.



црт.8

Решение (црт.8). Примenuвајќи ја косинусната теорема за триаголниците ABD и ABC, ги добиваме релациите:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha.$$

Ако ги собереме левите и десните страни на двете равенства ја добиваме бараната релација:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2 \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

Најди ги страните на триаголникот ако:

1. $a=13$, $c=8$, $\alpha=120^\circ$

2. $a+b=20$, $c=15$, $\beta=60^\circ$

3. $b-a=2$, $c=8$, $\alpha=60^\circ$

4. Пресметај ја должината на тежишната линија t_c во $\triangle ABC$ ако: $a=8$, $c=6$, $\beta=60^\circ$

5. Докажи дека во триаголникот со страни 3, 5 и 7 најголемиот агол изнесува 120° .

6. Пресметај ги краците c и d на трапезот ABCD ако: $a=13$, $b=3$, $\alpha=82^\circ 49'$, $\beta=42^\circ 25'$

7. Пресметај ги остриите агли α и β на трапезот ABCD ако: $a=12$, $b=4$, $c=7$, $d=6$

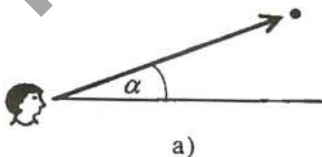
2.5.3. ПРИМЕНА НА ТЕОРЕМИТЕ ВО НЕКОИ ЗАДАЧИ ОД ПРАКТИКАТА

Низ неколку примери ќе видиме како со примена на синусната и косинусната теорема можеме да решиме разни задачи од геометријата, геодезијата и физиката.

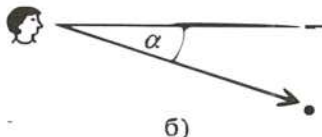
При решавањето на вакви задачи ќе ги користиме поимите: **агол на елевација** и **агол на депресија**, па затоа најпрвин да ги дефинираме овие поими.

Остриот агол α формиран од хоризонталната права и правата во која набљудувачот го гледа некој објект над хоризонталната линија се вика **агол на елевација** (црт.1а)

Остриот агол α формиран од хоризонталната права и правата во која набљудувачот го гледа некој објект под хоризонталната линија се вика **агол на депресија** (црт.1б)



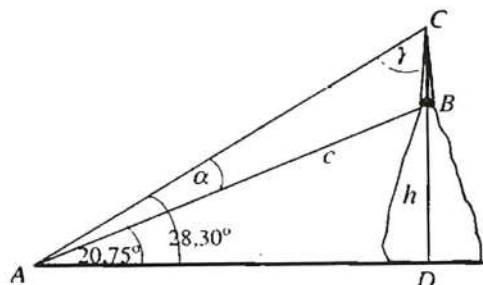
а)



б)

црт.1

➤ **Пример 1.** На врвот на рид висок h метри има стаяница (BC на црт.2) висока 70 метри. Од точката A во подножјето на ридот се гледа основата на стаяницата под агол на елевација $20,75^\circ$, а врвот на стаяницата се гледа под агол на елевација $28,30^\circ$. Да се одреди висината h на ридот.



црт.2

Решение. Од правоаголниот триаголник ADB (црт.2) имаме:

$$\sin 20,75^\circ = \frac{h}{c}, \text{ односно } h = c \sin 20,75^\circ.$$

Треба да го определиме c ?

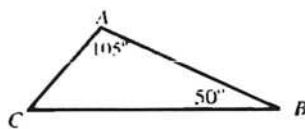
Во триаголникот ABC: $\alpha = 28,30^\circ - 20,75^\circ = 7,55^\circ$ и $\gamma = 90^\circ - 28,30^\circ = 61,70^\circ$.

Од синусната теорема за триаголникот ABC имаме:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{70}{\sin \alpha} \quad \text{т.е.} \quad c = \frac{70 \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{70 \sin 61,70^\circ}{\sin 7,55^\circ}.$$

$$\text{Следува, } h = c \sin 20,75^\circ = \frac{70 \sin 61,70^\circ}{\sin 7,55^\circ} \cdot \sin 20,75^\circ = 166,2 \text{ м.} \blacksquare$$

➤ **Пример 2.** Двајца велосипедисти возат со константна брзина прегнувајќи од истата точка C. Тие возат по должината на одвоени праволиниски патики (црт.3). Првиот велосипедист стигнува до точката A за 70 мин. По извесно време вториот велосипедист стигнува до точката B. Ако аголот CAB е 105° а аголот CBA е 50° , колку минути му биле потребни на вториот велосипедист за да стигне од C до B?



црт.3

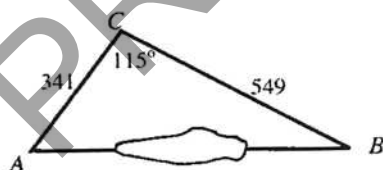
Решение. Изминатиот пат S при рамномерно праволиниско движење за време t и константна брзина v се определува со равенството

$$S = vt.$$

Следува $\overline{CA} = 70v$ и $\overline{CB} = tv$, а според синусната теорема во $\triangle ABC$ важи

$$\frac{70v}{\sin 50^\circ} = \frac{tv}{\sin 105^\circ},$$

$$\text{од каде наоѓаме } t = \frac{70 \sin 105^\circ}{\sin 50^\circ} = 88 \text{ min } 16 \text{ s} \blacksquare$$



црт.4

➤ **Пример 3.** Две месии A и B се одвоени со непроодна шума. За да се определи растојанието d помеѓу нив е избрана точка C (црт.4) достапна до A и B и при тоа се измерени големините:

$$\overline{CA} = 341 \text{ m}, \quad \overline{CB} = 549 \text{ m} \quad \text{и} \quad \varphi = \angle ACB = 115^\circ.$$

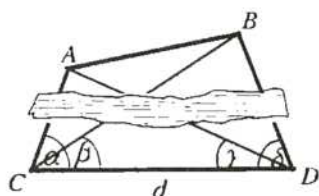
Да го определиме растојанието d помеѓу месии A и B.

Решение. Според косинусната теорема имаме:

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{CA}|^2 + |\overline{CB}|^2 - 2|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}| \cos \varphi$$

Ако ги замениме измерените вредности го определуваме растојанието d :

$$d = |AB| = \sqrt{341^2 + 549^2 - 2 \cdot 341 \cdot 549 \cdot \cos 115,5^\circ} = 760,8 \text{ m}$$



црт.5

➤ **Пример 4.** Да го најдеме растојанието помеѓу две недосигайни но видливи точки A и B .

Решение. За да ја решиме задачата избираме две точки C и D (црт.5), кои се на растојание, на пример, $d=20\text{m}$ и ги мериме аглиите α, β, γ и δ . Нека се измерени:

$$\alpha = 52^\circ 1', \beta = 42^\circ 40', \gamma = 81^\circ 15', \delta = 86^\circ 40'.$$

Од триаголникот BDC наоѓаме

$$\frac{BC}{\sin \delta} = \frac{d}{\sin(180^\circ - (\beta + \delta))} = \frac{d}{\sin(\beta + \delta)}$$

односно

$$BC = \frac{d \sin \delta}{\sin(\beta + \delta)} = \frac{20 \sin 86,40^\circ}{\sin 130,20^\circ} = \frac{19,9605}{0,7637} = 26,1365 \approx 26.$$

Слично, од триаголникот ACD имаме:

$$AC = \frac{d \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{20 \cdot \sin 81^\circ 15'}{\sin(52^\circ 1' + 81^\circ 15')} = \frac{20 \cdot 0,9883}{0,7281} = 27,14 \approx 27.$$

Сега во триаголникот ACB имаме две познати страни AC и BC и $\angle ACB = \alpha - \beta$, и според косинусната теорема можеме да ја определиме должината на AB :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\alpha - \beta) \quad \text{односно} \quad AB^2 = 27^2 + 26^2 - 27 \cdot 26 \cdot \cos 9^\circ 21' = 812,33,$$

од каде наоѓаме $AB = 28,5 \text{ m}$.

ЗАДАЧИ

1. Два авиона (во точките A и B на црт.1) се на височина од 2300m и 1800m , соодветно. Двата авиона летаат кон аеродромската кула T . Од T авионот A се гледа под агол на елевација 4° , а авионот B под агол на елевација $2,5^\circ$. Колку се оддалечени авионите еден од друг?
2. Набљудувач на морскиот брег висок $h=165,5\text{m}$ гледа во иста вертикална рамнина два усидрени брода под агли на депресија $\alpha = 24^\circ 18'$ и $\beta = 8^\circ 12'$. Колкаво е растојанието меѓу бродовите?
3. Висинометарот на авионот покажува висина од 927m . Во тој момент од авионот се гледа подножјето на една кула под агол на депресија $\alpha = 42^\circ 37'$, а нејзиниот врв под агол $\beta = 39^\circ 54'$. Колкава е висината на кулата?
4. Набљудувач се наоѓа на 500m оддалеченост од местото на полетувањето на балон вертикално нагоре, со константна брзина. Најди ја брзината на балонот, ако набљудувачот во еден момент го видел балонот под агол $\alpha = 10^\circ 24'$, а по 5 минути под агол $\beta = 68^\circ 32'$.
5. Од точката A на растојание од 14cm од едно рамно огледало паѓа светлосен зрак под агол $\alpha = 44^\circ 25'$, се одбива од точката B и се рефлектира во точката C . Најди го растојанието меѓу точките A и C ако $BC = 18\text{cm}$.
6. На наведната рамнина со наклонен агол $\alpha \approx 36^\circ 52' 12''$ е поставен товар $Q = 220\text{N}$. Колкава сила е потребна да го спречи лизгањето.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Пресметај ги вредностите на тригонометроиските функции за агол од 75° .

2. Даден е аголот α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) таков што $\cos \alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Пресметај го $\cos 2\alpha$ и потоа одреди го аголот α .

3. Пресметај ги вредностите на тригонометроиските функции за агол $\frac{\pi}{8}$

Пресметај:

4. $\sin 405^\circ$, $\cos 450^\circ$, $\operatorname{tg} 405^\circ$, $\operatorname{ctg} 450^\circ$. 5. $\sin^2 x - \cos^2 x$, $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x$ ако $x = \frac{37\pi}{6}$.

6. $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$ ако $\alpha = -\frac{13}{3}\pi$ 7. $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$ 8. $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$

Упрости ги изразите:

9. $\frac{1}{\sin x} - \operatorname{tg} x$

10*. $\sin x - \cos x$

11. $1 - \sin x - \cos 2x$

Трансформирај ги во производ изразите:

12. $\sin 70^\circ - \cos 40^\circ$

13. $\sin x \operatorname{tg} x + \sin x$.

Докажи ги идентитетите:

14. $\sin^2(x + 45^\circ) + \sin^2(x - 45^\circ) = 1$

15. $\operatorname{tg}(45^\circ + x) - \operatorname{ctg}(45^\circ - x) = 0$

16. $\frac{\sin x - 2\sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$

17. $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \cdot \sin 2x = 2$

18. $\frac{2\sin x - 2\sin 2x}{\sin x + \sin 2x} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$

19. $\frac{\cos 3x - \cos x}{4\cos x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}} = -4\cos^2 \frac{x}{2}$

20. $2\sin^2(\frac{\pi}{4} - x) + \sin 2x - 1 = 0$

21. $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^2$

22. $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = 0,125$

23. $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = 0,25$

24. $\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

25. $\sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

26. $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = 0,25$

Реши ги тригонометриските равенки:

27. $2\sin 3x = \sqrt{3}$

28. $\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{2}{3}x + 1 = 0$

29. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$

30. $\sin 2x + \cos x = 0$

31. $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$

32*. $\sin x + \operatorname{tg} x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$

33. $4\sin^2 x - 2(\sqrt{2} - 1)\sin x - \sqrt{2} = 0$

34. Нацртај го графикот на функцијата $y = -\sin x - 1$.

35. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y = 3 \sin(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4})$

36. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y = \frac{3}{4} \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$

Реши ги триаголниците:

37. $c = 123$, $\alpha = 35^\circ 12'$, $\beta = 80^\circ 20'$ 38. $b = 475,6$; $c = 213,4$; $\alpha = 49^\circ 15' 24''$

39. $a = 67$, $b = 43$, $c = 36$

40. Докажи дека за должината на тежишната линија m_A , повлечена од темето A на триаголникот ABC важи: $m_A^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2})$, каде a , b , c се страни на триаголникот.

41. Индексот на рефлексija на водата во однос на воздухот е $\frac{4}{3}$. Пресметај го аголот на рефлексija β , ако влезниот агол на светлинскиот зрак е $\alpha = 60^\circ$.

42. Пресметај ги радиусите на впишаната и опишаната кружница во триаголник ако се дадени неговите страни: $a = 8$, $b = 12$, $c = 15$.

43. Пресметај ја плоштината на ромб ако се дадени неговата страна $a = 8,5$ и остриот агол $\alpha = 28,5^\circ$

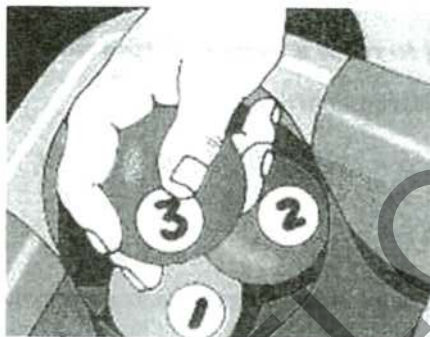
44. Пресметај ги дијагоналите на делтоидот со страни $a = 8,5$, $b = 5$ и аголот меѓу нив $\alpha = 120^\circ$.

ПТОЛЕМАЈ КЛАУДИЈ (Ptolemaeus Claudis) (II. век) - старогрчки астроном, геометар, географ, претставник на Александриската школа. Најпознатото негово дело *Меѓалис синџаксис* е зачувано во арапски превод под име *Алмаџест*. Тоа содржи тринаесет книги во кои е сместено целосното тогашно знаење од астрономија. Во него се сместени содржини од рамнинска и од сферна тригонометрија, па затоа е сметан за прв учебник од тригонометрија.

ПРИРОДА. ЖИВОТ. МАТЕМАТИКА. 3.



Нуклеарна централа



Се коцкаме ли со иднината!

*Основната цел на секоја наука е да ѝ ја предвиди иднината.
Математиката е основна наука на предвидување.*

Што кажува математиката за веројатност од можна еколошка катастрофа од нуклеарен инцидент во нуклеарните центри?

Во пресметките при изградбата на првите нуклеарни центри, без експериментално искуство, теориски се тврдеше дека веројатноста од голем нуклеарен инцидент се мери со ред големина од 10^{-8} . Меѓутоа, 20 години подоцна, се изградија стотина големи нуклеарни центри и се случија два големи нуклеарни инциденти во нив: на островот Три Милји (САД) и градот Чернобил (Русија). Тоа значи дека експерименталната веројатност (веројатност a posteriori) е:

$$\frac{2}{100} = 2\%.$$

Тоа е многу голема веројатност. Колкава? - покажаа страшните последици од човечки животи, инвалидизирани лица, материјални штети, немир кај човештвото од евентуални наредни нуклеарни катастрофи.

За илустрација, што значи горната веројатност ќе покажеме на примери од човековото искуство каде тој има малку подолг период на дејствување:

- Во индустриското производство при шкарти од 2%, лентата за производство воопшто не се пушта, особено за скапи производи;
- Во воздухопловството, ако опасноста од технички инцидент што би предизвикал паѓање на авионот е 2%, тој воопшто не полетува.

Неизвесноста за иднината треба да не опомене дека Земјата е единственото место за пристојно живеење (засага). Дека не треба да се коцкаме со орудијата за живот и работа за да не ја прокоцкаме нашата сино-зелена планета, доволно зборува горниот пример.

А како стојат работите со коцкањето во игрите на среќа, можете да видите откако ќе ги совладате содржините од темата што следува, темата за комбинаториката и веројатноста.

ЕЛЕМЕНТИ ОД КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЈАТНОСТ

Многу појави кои се јавуваат во природата и секојдневното живеење ние сме во состојба точно да ги предвидиме и објасниме врз основа на познавањето на причините за нивното појавување. За некои сме сигурни дека ќе се случат: затемнувањето на Месечината, периодичноста на приливот и одливот, последичната врска меѓу електричното празнење во облаците и грмотевицата и др. Но, постојат и појави за кои не може со сигурност да се предвиди појавувањето и текот на случувањето и тогаш велíme дека веројатно ќе се случат: игри на среќа, земјотреси и сл. Исто така, свесни сме дека нивното појавување се одвива според одредена законитост, бидејќи и нив ги предизвикуваат одредени причинители. Тогаш ја сфаќаме обемноста на задачата и не наоѓајќи ги сите можни решенија, донесуваме одлука по свое видување, која во тој момент ни се чини најлогична. Човекот учи на примери, но да се извлече заклучок за да се разреши даден проблем е навистина вештина. Математичката дисциплина што ги проучува овие законитости се вика **теорија на веројатност**.

3. 1. КОМБИНАТОРИКА

Во тесна врска со теоријата на веројатноста, како и за потребите во изведувањето на пресметувањата во неа, е и една друга област на математиката. И таа се развила од практичните потреби на човекот. Имено, во животот често се сретнуваме со потребата за распоредување на предмети, активности, знаци, букви и сл. Нивното распоредување и групирање го правиме според критериуми на моментни и трајни потреби и интереси. Меѓутоа, и во овој случај постојат правила и законитости. Областа на математиката која се занимава со изучување на можните распореди и групирања на елементите на конечни множества се вика **комбинаторика**. Комбинаториката изучува подмножества од дадени множества или групи од повеќе елементи на дадено множество. Во зависност од начинот на нивно формирање и од тоа дали е битен или не, распоредот на елементите во нив, разликуваме **варијации, пермутации и комбинации**.

Повеќе докази на тврдења за варијации, пермутации и комбинации можат да се изведат со примена на т.н. **принцип на математичка индукција** и затоа на почетокот на оваа тема ќе ги разгледаме содржините и суштината на тој принцип.

3.1.1. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

Методот за докажување дека едно тврдење е вистинито за секој природен број се вика **метод на математичка индукција**. Јачината на овој метод станува јасна кога ќе сфатиме дека исцрпна проверка на секој поединечен случај не е можна (множеството на природните броеви е бесконечно). Овој метод се засновува врз принципот на математичката индукција. Индукцијата, како метод на учење со кој се доаѓа до вистината, е заснована на набљудување на поединечното и заклучување за општото.

Принцип на математичка индукција

Едно тврдење за природните броеви е вистинито:

1^о. ако е вистинито за природниот број 1,

2^о. ако од претпоставката дека е вистинито за природниот број k , ($k \geq 1$) може да се докаже дека е вистинито и за природниот број $k+1$.

Начинот на докажување кој се заснова на принципот на математичката индукција се нарекува уште и метод на целосна математичка индукција. Нагласувањето на целосноста подразбира дека постои и метод на нецелосна индукција т.н. емпириска индукција, која се состои во тоа што од доказот за вистинитост на некој исказ за природните броеви 1, 2, 3, 4, ... се изведува заклучок дека исказот е точен за секој природен број. Имено, методот на нецелосна математичка индукција се засновува на набљудувања на ограничен број поединечни случаи и се изведува општ заклучок кој треба да важи за сите случаи од тој вид. Но, таквите заклучоци секогаш не мора да бидат вистинити колку и да е голем бројот на набљудуваните случаи. Во историјата на математиката познати се неистинити заклучоци добиени со нецелосна математичка индукција. Таков еден неистинит заклучок е тврдењето на францускиот математичар Пјер Ферма (1601-1665), дека сите броеви од обликот $2^{2^n} + 1$ се прости. Навистина тоа е точно за $n=1, 2, 3, 4$, при што се добиваат броевите 5, 17, 257, 65537 кои се прости. Меѓутоа, заклучокот бил погрешен, бидејќи германскиот математичар Леонард Ојлер (1707-1783) покажал дека за $n=5$ бројот $2^{2^5} + 1 = 4294967297$ е сложен, бидејќи е делив со 641. Подоцна се најдени дури 37 сложени броеви од обликот $2^{2^n} + 1$. И за случајот на вредноста на изразот $n^2 - 79n + 1601$ ($n \in \mathbb{N}$), дека е прост број може да се донесе погрешен заклучок, бидејќи за $n=1, 2, 3, \dots, 79$ тој е прост број, но веќе за $n=80$ изразот станува сложен број.

Методот на математичката индукција најчесто се користи за утврдување на вистинитоста на искази, заклучоци или формули до кои се дошло со нецелосна индукција. Тоа се оние искази кои содржат природен број n и за кои е проверено дека важат за $n=1, 2, 3, \dots$. Со методот на математичка индукција се утврдува дали тој исказ важи и за кој било природен број n .

► **Пример 1.** Да докажеме дека $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, каде $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Го проверуваме равенството за $n = 1$ и добиваме дека $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$.

Да претпоставиме дека равенството е точно за природниот број $n = k$, т.е. нека важи:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Сега да ја докажеме точноста на тврдењето за $n = k+1$. Имаме:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1),$$

$$\text{и бидејќи } \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2},$$

$$\text{имаме: } 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}. \text{ Според ова тврдењето е точно за } n = k+1.$$

Значи според принципот на математичката индукција, тврдењето е точно за секој природен број. ■

► **Пример 2.** Да докажеме дека за секој природен број n , бројот $n^2 + n + 2$ е делив со 2.

Решение. Нека со $p(n)$ го означиме тврдењето $2 \mid n^2 + n + 2$.

Ја проверуваме точноста на тврдењето за $n = 1$. Имаме $1^2 + 1 + 2 = 4$, а $2 \mid 4$. Значи, $p(1)$ е точно тврдење.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $n = k$, т.е. нека е точно $p(k)$, значи, $2 \mid k^2 + k + 2$, тогаш $k^2 + k + 2 = 2a$, каде што a е некој природен број.

Сега да ја докажеме точноста на тврдењето за $n = k + 1$. За таа цел разгледуваме:

$$(k+1)^2 + (k+1) + 2 = k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 2 = (k^2 + k + 2) + (k + 2) = 2a + 2(k+1) = 2(a + k + 1) = 2b,$$

каде $a + k + 1 = b$. Значи точно е и тврдењето $p(k+1)$.

Според принципот на математичка индукција, тврдењето дека бројот $n^2 + n + 2$ е делив со 2 е точно за секој природен број. ■

Постојат искази кои се вистинити, почнувајќи од природен број n_0 кој е поголем 1. Во тој случај принципот на математичката индукција се формулира на следниот начин:

Принцип 2. Едно тврдење е вистинито за секој природен број $n \geq n_0$:

1^о. ако е вистинито за природниот број n_0 ($n_0 \geq 1$),

2^о. ако од претпоставката дека е вистинито за природниот број k ($k \geq n_0$), може да се докаже дека е вистинито и за природниот број $k+1$.

Може да се забележи дека принципот на математичката индукција е специјален случај на принципот 2.

► **Пример 3.** Да го докажеме неравенството $2^n > 2n + 1$, каде n е природен број поголем од 2.

Решение. За $n = 1$ и $n = 2$ неравенството не е точно. Провери!

Ја проверуваме неговата точност за $n = 3$ и имаме $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$, од каде следува $8 > 7$, што е точно.

Да претпоставиме точност за $n = k$ ($k \geq 3$), т.е. нека е исполнето $2^k > 2k + 1$. Останува да ја докажеме точноста на тврдењето за $n = k + 1$. Притоа од $2k > 1$, имаме:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot (2k + 1) = 2k + 2k + 2 = 2(k+1) + 2k > 2(k+1) + 1,$$

значи, неравенството е исполнето за секој природен број поголем од 2. ■

ЗАДАЧИ

Докажи дека за секој природен број n се точни следниве тврдења:

1. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.

2. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$.

3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

4. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$.
5. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
6. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$.
7. $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
8. $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$. ($a \neq 1$).
9. Докажи дека за секој природен број n , бројот:
- а) $6^{2n} - 1$ е делив со 35, б) $2^n + 5^{n+1}$ е делив со 3, в) $n(n+1)$ е делив со 2,
г) $n(n+1)(n+2)$ е делив со 3, д) $n^3 - n$ е делив со 6.
10. Докажи ги неравенствата:
- а) $2^n > n$, $n \geq 1$, б) $3^n \geq 3n$, $n \geq 0$.
11. Со математичка индукција провери ја точноста на формулите:
- а) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n + 1$, б) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1}$.

3.1.2. ВАРИЈАЦИИ

Нека е дадено конечното множество $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ чии елементи можат да бидат лица, предмети, букви, броеви, знаци, настани и друго.

Секое распоредување (групирање) на даден број елементи од множеството M во групи, такви што се разликуваат едни од други или по составот на елементите или по нивниот распоред, се вика **варирање**. Овие групи од елементи, подмножества од множеството M , кои се разликуваат едни од други по редоследот на елементите во нив, се викаат **варијации**. Во зависност од бројот на елементите во варијацијата, таа може да биде од 1-ва класа ако има само еден елемент, од 2-ра класа ако има два елемента и т.н. Елементите во една варијација можат да бидат различни и некои или сите да бидат исти, затоа ќе го користиме терминот варијации без повторување и варијации со повторување. Сега можеме да ги дефинираме варијациите без и со повторување од k -та класа.

1. Варијации без повторување

Дефиниција. Варијации без повторување од класа k од n елементи ($k \leq n$) се поодредени k -торки составени од различни елементи на множеството M .

Бројот на варијациите без повторување од класата k од множеството со n елементи се бележи со: V_n^k .

При распоредувањето на елементите се поставуваат две основни задачи:

- да се напишат и подредат сите можни варијации,
- да се пресмета нивниот број.

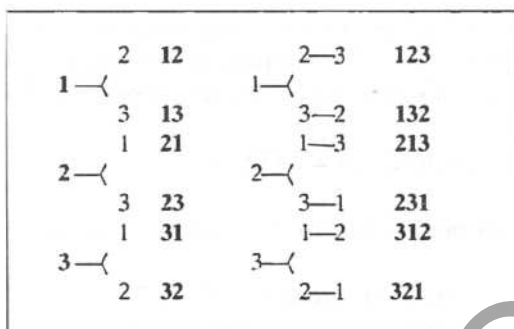
► **Пример 1.** Да ги формираме сите варијации без повторување од множеството $M = \{1, 2, 3\}$ и да го воочиме нивниот број.

Решение. Варијации од прва класа се самите елементи: 1, 2, 3.

Варијации од втора класа се сите подредени парови: 12, 13, 21, 23, 31, 32.

Варијации од трета класа се сите подредени тројки: 123, 132, 213, 231, 312, 321. ■

На гранест дијаграм ќе го илустрираме начинот на формирање на варијациите без повторување од прва, втора и трета класа на множеството $M = \{1, 2, 3\}$.



Црт. 1а

Црт. 1б

Варијациите од прва класа се прикажани во првата колона на црт. 1а. Значи ги има 3.

Варијациите од втора класа се формираат така што на елементите од прва класа им се придружуваат преостанатите елементи (на пример, на 1 му се придружува 2 и потоа 3), тие се прикажани во третата колона на црт. 1а. Значи ги има $6 = 3 \cdot 2$.

Варијациите од трета класа се формираат така што на паровите кои претставуваат варијации од втора класа им се придружуваат преостанатите елементи, тие се прикажани во четвртата колона на црт. 1 б. Значи ги има $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Како се пресметува бројот на варијациите без повторување во општ случај ќе видиме на следниов пример.

► **Пример 2.** Да го најдеме бројот на варијациите без повторување од 1-ва, 2-ра, 3-та, ..., n -та класа од елементите на множеството $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Решение. Бројот на варијациите без повторување од 1-ва класа од n елементи го претставува бројот на можностите на прво место да се стави кој било од елементите 1, 2, 3, ..., n . Нив очигледно ги има n на број, затоа: $V_n^1 = n$.

Бројот на варијациите без повторување од 2-ра класа од n елементи го претставува бројот на можностите во ист момент на прво место да се стави некој од елементите 1, 2, 3, ..., n , а на второ место некој од преостанатите $n-1$ елементи од даденото множество. Значи, тој број ќе биде $V_n^2 = n(n-1)$.

Бројот на варијации без повторување од 3-та класа од n елементи го претставува бројот на можности во ист момент на прво место да се стави некој од елементите 1, 2, 3, ..., n , а на второ место некој од преостанатите $n-1$ елементи од даденото множество, а на трето место некој од преостанатите $n-2$ елементи на даденото множество. Значи, тој број сега ќе биде: $V_n^3 = n(n-1)(n-2)$.

Формирањето на варијациите без повторување продолжува сè додека не се исцрпат сите елементи, затоа вкупниот број на сите можни варијации без повторување од k -та класа од n елементи е:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1), \text{ каде } k \leq n$$

(1)

➤ **Пример 3.** Во паралелка од 30 ученици треба да се избере класно раководство, кое се состои од претседател, секретар и благајник. На колку начини можеме да го направиме изборот?

Решение. Овде станува збор за групи од тројки ученици, при што битен е редоследот (не е сеедно кој ќе биде претседател, кој секретар, а кој благајник). Значи имаме варијации, јасно без повторување од 3-та класа од 30 елементи. Изборот на класно раководство може да се изврши на 24360 начини. Ти се верува ли? Па, да провериме со формулата (1):

$$V_{30}^3 = n(n-1)(n-2) = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360. \blacksquare$$

➤ **Пример 4.** Колку различни петцифрени броеви можеме да формираме од првите 8 цифри?

Решение. Овде $n=8$, $k=5$; затоа од (1) би имале $V_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ броеви.

Но, варијациите што почнуваат со 0 мораат да се испуштат (зошто?). Значи мора да ги одземеме броевите што почнуваат со 0, а нив ги има: $V_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. Според тоа вкупниот број петцифрени броеви ќе биде: $V_8^5 - V_7^4 = 6720 - 840 = 5880. \blacksquare$

➤ **Пример 5.** Ако од Скопје до Охрид сообраќаат 12 авиобуси дневно, на колку начини може да илјуваме до илјаму и назад, ако се илјува:

- до илјаму и назад со истиот авиобус,
- до илјаму со еден, а назад со друг авиобус?

Решение. а) На $V_{12}^1 = 12$ начини, б) На $V_{12}^2 = 12 \cdot 11 = 132$ начини. ■

➤ **Пример 6.** На колку начини можеме да наредиме 8 различни книги на една полица, ако сакаме:

- при од книгите секогаш да се една до друга;
- при од книгите никогаш да не се една до друга?

Решение.

а) Бидејќи 3 од книгите сакаме секогаш да се една до друга, нив ќе ги сметаме како еден елемент во однос на преостанатите, па вкупно имаме 6 елементи. Овие 6 елементи можеме да ги наредиме на V_6^6 начини, но и трите книги што одат во комплет можат меѓусебе да се наредат на различни начини, и тоа на V_3^3 начини. Значи три од осумте книги секогаш ќе бидат една до друга на $V_6^6 \cdot V_3^3 = 4320$ начини.

б) Осум книги, без ограничување, можат да се наредат на $V_8^8 = 40320$ начини, но тогаш ќе се случи и оние три книги да бидат една до друга, што противречи на условот на задачата. Затоа, потребно е од бројот на сите разместувања на книгите (40320) да го одземеме бројот на варијациите 4320 кога трите книги се заедно. Одговорот на второто барање во задачата тогаш е $V_8^8 - V_6^6 \cdot V_3^3 = 36000. \blacksquare$

2. Варијации со повторување

Варијации кај кои еден или повеќе елементи се повторуваат повеќе пати се викаат варијации со повторување. Бројот на варијациите со повторување од n елементи k -та класа се бележи со ∇_n^k .

Формирањето и бројот на варијациите со повторување, слично како и кај варијациите без повторување, ќе го разгледаме на примери.

► **Пример 1.** Да ги формираме сите варијации со повторување од елементите на множеството $M = \{1, 2, 3\}$ и да го уочиме нивниот број.

Решение. Варијации со повторување од прва класа се самите елементи на множеството M :

1, 2, 3.

Вкупно ги има 3.

Варијациите со повторување од втора класа се добиваат така што на десната страна од варијациите со повторување од прва класа се допишува секој од елементите на множеството M , при што добиваме:

11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

Вкупно ги има $3 \cdot 3 = 9$.

Варијациите со повторување од трета класа се добиваат така што на десната страна од варијациите со повторување од втора класа се допишува секој од елементите на множеството M , при што добиваме:

111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133;

211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233;

311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333.

Вкупно ги има $9 \cdot 3 = 27$.

Како се пресметува бројот на варијациите со повторување во општ случај ќе видиме на следниов пример.

► **Пример 2.** Да го најдеме бројот на варијациите со повторување од прва, втора, третa, и т.н. k -та класа на множеството $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Решение.

Бројот на варијациите со повторување од прва класа е еднаков на бројот на елементите на множеството M , значи: $\nabla_n^1 = n$.

Бројот на варијациите со повторување од втора класа се добива кога на секоја варијација со повторување од прва класа, нив ги има n на број, ќе се присоедини секој од елементите на множеството M кои се исто така n на број, затоа: $\nabla_n^2 = n \cdot n = n^2$.

Бројот на варијациите со повторување од трета класа се добива кога на секоја варијација со повторување од втора класа, нив ги има n^2 на број, ќе се присоедини секој од елементите на множеството M кои се n на број, затоа: $\nabla_n^3 = n^2 \cdot n = n^3$.

Слично се добива бројот на варијациите со повторување од четврта, петта, ..., k -та класа, па бројот на варијациите со повторување од k -та класа ќе биде:

$$\nabla_n^k = n^k$$

► **Пример 3.** Колку Морзеови "зборови" можат да се формираат од основните знаци "." и "-". ако се знае дека еден "збор" се состои од најмногу четири основни знаци?

Решение. Овде станува збор за варијации со повторување и при тоа имаме "зборови" со должина од еден, два, три или четири основни знаци, затоа вкупниот број "зборови" е:

$$\nabla_2^1 + \nabla_2^2 + \nabla_2^3 + \nabla_2^4 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30. \blacksquare$$

► **Пример 4.** Колку елементи има множеството ако бројот на варијациите со повторување од 4-та класа изнесува 83521?

Решение. Имаме: $\nabla_n^4 = 83521$, па $n^4 = 83521$, од каде $n = \sqrt[4]{83521} = \sqrt{289} = 17. \blacksquare$

► **Пример 5.** Колку елементи има множеството за кое важи: $\nabla_{2n+1}^3 : \nabla_{2n-1}^3 = 210 : 169$?

Решение. Од условот на задачата имаме $(2n+1)2n(2n-1) : (2n-1)^3 = 210 : 169$, од каде ја добиваме равенката $82n^2 - 589n + 105 = 0$, чие решение е $n_1 = 7$, второто решение не се зема предвид бидејќи е негативен број. $\blacksquare$

ЗАДАЧИ

1. Од елементите на множеството $M = \{a, b, c, d\}$ формирај ги сите варијации без повторување од прва, втора и трета класа.
2. Колку различни сигнали можеш да направиш од 6 светла во различни бои групирајќи ги по 3?
3. Колку двоцифрени броеви можеш да напишеш од цифрите 0, 1, 3 и 5 ако во бројот не се повторува ниедна цифра?
4. Колку петцифрени броеви можеш да напишеш од цифрите 0, 1, 3, 5, 7 и 9, така што нулата не е ни на прво ни на последно место и ниедна цифра не се повторува?
5. Меѓу два града има 13 станици. Колку различни карти за патување може да се издадат?
6. Имаш право да избираш еден од 6 странски јазици и една од 5 научни дисциплини. На колку начини можеш да избереш два јазика и две научни дисциплини?
7. Пресметај го n ако $52 \cdot \nabla_n^3 = 3 \cdot \nabla_{n+2}^4$?
8. Бројот на варијациите со повторување од k -та класа од 5 елементи изнесува 15625. Колкаво е k ?
9. Колку варијации со повторување од 4-та класа можеш да формираш од елементите на множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: а) кои ја содржат единицата и таа може да се повторува; б) ако единицата се јавува само еднаш?
10. На колку различни начини можеш да пополниш ливче за спортска прогноза, ако се знае дека тоа содржи 13 фудбалски екипи чиј резултат е од тип 0 (за нерешено), 1 (за победа на домаќинот) и 2 (за победа на гостите)?

3.1.3. ПЕРМУТАЦИИ

Секое распоредување (групирање) на даден број елементи од едно множество во групи, при што во секоја група се сите дадени елементи, но секогаш во друг редослед, се нарекува **пермутирање**. Групите кои се состојат од сите елементи на даденото множество, а се разликуваат една од друга само по различниот редослед на елементите, се викаат **пермутации**. Во зависност од тоа дали елементите во пермутацијата се повторуваат или не, разликуваме пермутации со и без повторување.

1. Пермутации без повторување

Секоеј распоред што може да се формира од n -те елементи на дадено множество, така што во него се јавуваат сите тие елементи само по еднаш, а еден од друг распоредите се разликуваат само по различниот редослед на елементите, се нарекува **пермутација без повторување**. Тоа значи дека пермутациите без повторување се всушност, варијации без повторување од n -та класа на множество со n елементи, па можеме да ги дефинираме на следниов начин:

Дефиниција. Пермутации без повторување од n елементи на множеството $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ се пооредени n -торки на различни елементи на множеството M .

Бројот на пермутациите без повторување од n различни елементи на дадено множество се бележи со P_n .

Формирањето на пермутации без повторување, како и одредувањето на нивниот број ќе го покажеме на примери.

► **Пример 1.** Да ги формираме пермутациите без повторување од елементите на множеството: а) $\{a, b\}$; б) $\{a, b, c\}$; в) $\{a, b, c, d\}$; и да го уочиме нивниот број.

Решение. Пермутациите без повторување од дадените множества се:

а) ab, ba .

Вкупно ги има 2.

б) $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Вкупно ги има $3 \cdot 2 = 6$.

в) $abcd,$	$abdc,$	$acbd,$	$acdb,$	$adbc,$	$adcb,$
$bacd,$	$badc,$	$bcad,$	$bcda,$	$bdac,$	$bdca,$
$cabd,$	$cadb,$	$cbad,$	$cbda,$	$cdab,$	$cdba,$
$dabc,$	$dacb,$	$dbac,$	$dbca,$	$dcab,$	$dcba,$

Вкупно ги има $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. ■

На гранест дијаграм ќе го илустрираме начинот на формирање на пермутации без повторување од елементите на множеството $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

3—4 1234	3—4 2134	2—4 3124	2—3 4123
2— / 4—3 1243 / 2—4 1324 1—3— \ 4—2 1342 \ 2—3 1423 4— 3—2 1432	1— / 4—3 2143 / 1—4 2314 2—3— \ 4—1 2341 \ 1—3 2413 4— 3—1 2431	1— / 4—2 3142 / 1—4 3214 3—2— \ 4—1 3241 \ 1—2 3412 4— 2—1 3421	1— / 3—2 4132 / 1—3 4213 4—2— \ 3—1 4231 \ 1—2 4312 3— 2—1 4321

За прикажување на начинот на пресметување на **бројот** на пермутации без повторување, ќе го искористиме повторно примерот 1.

Во множество со еден елемент е можна само една пермутација без повторување, затоа: $P_1=1$.

Во множеството со два елемента, во примерот 1а) при формирањето на пермутациите без повторување видовме дека се можни само две, т.е.: $P_2 = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot 1$.

Во множеството со три елемента, во примерот 1б) при формирањето на пермутациите без повторување видовме дека, е можно да се сместат во три групи, од кои една почнува со a , втората со b и третата со c . Во секоја група е можен толкав број пермутациите колку што пати можат да се пермутираат преостанатите два елемента, значи во три групи по две пермутации, затоа $P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Во множеството со четири елемента, во примерот 1в) при формирањето на пермутациите без повторување видовме дека е можно да се сместат во четири групи, од кои една почнува со a , втората со b , третата со c и четвртата со d . Во секоја група е можен толкав број пермутации колку што пати можат да се пермутираат преостанатите три елемента, значи во четири групи по шест пермутации, затоа $P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Слично се одредува бројот на пермутациите без повторување од множество со 5 елемента и тој би бил: $P_5 = 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ пермутации.

Од множество со $n-1$ елемента $P_{n-1} = (n-1) \cdot P_{n-2}$.

И на крај од множество со n елемента бројот на пермутациите без повторување ќе биде $P_n = n \cdot P_{n-1}$, а оттука следува дека:

$$P_n = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Овој производ на n последователни природни броеви симболички се означува со $n!$ (се чита n факториел). Значи $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n = n!$, т.е. $P_n = n!$.

Според дефиниција се зема дека $0! = 1$.

Да забележиме дека важи: $P_n = V_n^n$, провери зошто?

► **Пример 2.** Дадени се елементите од множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$; во колку пермутации елементите 3,4,5 се еден до друг, и тоа:

а) во овој редослед, б) во произволен редослед?

Решение.

а) Бидејќи елементите 3,4,5 се бара да се во овој редослед, нив можеме да ги сметаме за еден елемент и заедно со преостанатите три елементи можат да се пермутираат т.е. да се распоредат на $4!$ начини, значи имаме 24 пермутации.

б) Во овој случај редоследот на елементите 3,4,5 во групата е произволен. Овие три елементи можат да се распоредат на $3!$ начини. Но, во кој било од овие случаи нив можеме да ги сметаме повторно за еден елемент без обзир на нивниот редослед, и повторно имаме 4 елемени, затоа бројот на пермутациите овде изнесува $P = 3! \cdot 4! = 144$.

► **Пример 3.** На колку начини 8 лица можат да седнат едно до друго на 8 седишта, ако седиштата се во еден ред?

Решение. Сите лица треба да се сместат на седиштата и тоа во секаков можен редослед, значи станува збор за пермутации, јасно без повторување. Тоа може да се направи на $P_8 = 8! = 40320$ начини.

► **Пример 4.** На колку начини можат да се распоредат 5 момчиња и 4 девојки во ред од 9 седишта ако наизменично седаат момче до девојка?

Решение. Пет момчиња можат да се распоредат на $5!$ начини, а четири девојки на $4!$ начини. Бројот на можните распореди во кои момчињата наизменично седат до девојките е нивниот производ, т.е. $P = 5! \cdot 4! = 2880$.

► **Пример 5.** Бројот на пермутации без повторување од $n-2$ елементи е 90 пати помал од бројот на пермутации без повторување од n елементи. Колкаво е n ?

Решение. Од условот на задачата имаме $P_n = 90 \cdot P_{n-2}$, односно:

$$n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 90 (n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

по делењето со $(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$, ќе добиеме $n(n-1) = 90$, односно $n^2 - n - 90 = 0$. Решенијата на оваа квадратна равенка се $n_1 = 10$, $n_2 = -9$. Второто решение не се зема предвид, затоа одговорот е $n = 10$.

2. Пермутации со повторување

Досега разгледувавме пермутации кај кои сите елементи беа различни, меѓутоа може да се случи меѓу елементите на дадено множество да имаме извесен број исти елементи и треба да ги пермутираме. Притоа, нека имаме множество од n елементи, меѓу кои k_1 еднакви од еден вид, k_2 еднакви од друг вид, k_3 еднакви елементи од трет вид, ..., k_r еднакви од r -ти вид, каде $r < n$ и $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_r = n$. Секој распоред од сите елементи на вака зададеното множество се вика **пермутација со повторување** од тие елементи.

Постапката за формирање на пермутации со повторување и одредувањето на нивниот број е слична на формирањето на пермутации без повторување и неа ќе ја изложиме на примери.

► **Пример 1.** Да ги формираме сите различни пермутации со повторување од елементите на множеството $\{a, a, b\}$.

Решение. Најнапред на еднаквите елементи привремено да им доделиме индекси за да можеме да ги разликуваме, потоа елементите ќе ги пермутираме и на крај ќе ги избришеме индексите и ќе ги преброиме различните пермутации. Така ќе ги добиеме пермутациите: $a_1 a_2 b$, $a_1 b a_2$, $a_2 a_1 b$, $a_2 b a_1$, $b a_1 a_2$, $b a_2 a_1$, од каде со бришење на индексите се

добиваат пермутациите: *aab, aba, aab, aba, baa, baa*. Сега отфрламе по една од истите пермутации и ги добиваме различните пермутации со повторување: *aab, aba, baa*, чиј број е два пати помал од бројот на пермутациите без повторување.■

Ако пермутираме множество од n елементи, од кои k се еднакви ($k \leq n$), тогаш како во претходниот пример пермутациите со повторување ги добиваме со привремено воведување на индекси кај истите елементи: т.е. формираме пермутации без повторување, потоа ги бришеме индексите кај истите елементи и ги отфрламе еднаквите пермутации. На тој начин ги добиваме пермутациите од n елементи, од кои k се еднакви и нивниот број ќе биде еднаков на бројот на пермутации без повторување од n елементи земен како да се различни, т.е. $n!$, поделен со бројот на пермутации од k елементи, т.е. $k!$, бидејќи толку ги има еднакви. Нивниот број го бележиме со $P_n(k)$ и тој ќе биде:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!}$$

(1)

Со аналогна постапка го определуваме и бројот на пермутациите од n елементи, меѓу кои има r различни ($r \leq n$), од кои првиот се повторува k_1 пати, вториот k_2 пати, третиот k_3 пати, ..., r -тиот k_r пати, при што тој е еднаков на:

$$P_n(k_1, k_2, k_3, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_r!}, \text{ каде } k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_r = n.$$

(2)

➤ **Пример 2.** Колку пермутации можеме да формираме од буквите на зборот МАТЕМАТИКА?

Решение. Во зборот МАТЕМАТИКА буквата М се повторува два пати, А три пати и Т два пати, затоа бројот на пермутациите со повторување ќе биде:

$$P_{10}(2,3,2) = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200. \blacksquare$$

➤ **Пример 3.** Од цифрите 1,2,2,2,2,3,3,4,4,4 да составиме десетцифрени броеви. Колку такви броеви почнуваат со: а) 22; б) 313; в) 1234?

Решение. За секој од случаите тоа е бројот на пермутациите со повторување од преостанатите цифри:

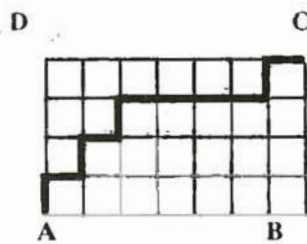
$$\text{а) } P_8(2,2,3) = \frac{8!}{2!2!3!} = 1680; \quad \text{б) } 35 \text{ (зошто?);} \quad \text{в) } 60 \text{ (зошто?).} \blacksquare$$

➤ **Пример 4.** Правоаголникот ABCD со димензии $7m$ и $4m$ е поделен со хоризонтални и вертикални линии на квадрати со плошина од $1m^2$. На колку различни начини можеме да ситиѓнеме од темето А до темето С, ако е дозволено само движење надесно и нагоре?

Решение. Секое движење од темето А до темето С содржи 4 патишта од по $1m$ горе (g) и 7 патишта од по $1m$ десно (d). Тогаш избраниот пат ќе претставува пермутација од 11

елементи (11 м пат) со повторување. На пример избраниот пат на цртежот 1. ја претставува пермутацијата *gdgdgdddddgd*. Вкупниот број пермутации ќе биде:

$$P_1(4,7) = \frac{11!}{4!7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7!} = 330. \blacksquare$$



црт.1

ЗАДАЧИ

1. Формирај ги сите пермутации од елементите на множеството $\{a, o, z, n\}$ и најди ги оние кои претставуваат зборови со смисла во македонскиот јазик.
2. Во колку пермутации елементите 1,2,3,4 од множеството $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ се наоѓаат еден до друг, и тоа: а) во истиот редослед; б) во произволен редослед?
3. Дадено е множеството $\{0,1,2,3,4,5\}$. Определи го бројот на различни шестоцифрени броеви кои можеш да ги формираш од елементите на даденото множество, така што цифрите да не се повторуваат?
4. Бројот на пермутациите од n елементи во однос на бројот на пермутациите од $n+2$ елементи се има како $0.1 : 3$. Определи го n ?
5. На една полица има 2 сини, 5 црвени и 3 жолти книги. На колку начини можеш да ги распоредиш овие книги така што книгите со иста боја на корицата да се една до друга?
6. На колку различни начини можеш од кутија да извлечеш 3 бели, 2 црвени и 5 сини топчиња?
7. Колкав е бројот на пермутациите од буквите на зборот ТЕРМОМЕТАР?
8. Колку има седумцифрени броеви, при што три цифри се еднакви на 1, две на 2 и две на 3?
9. Колку има шестоцифрени броеви, при што три цифри се еднакви на 0, две на 1 и една на 2?
10. Определи го бројот на пермутациите од елементите a,a,a,a,a,b,b,b,c кои:
 - а) почнуваат со a ;
 - б) почнуваат со b ;
 - в) почнуваат со c .

3.1.4. КОМБИНАЦИИ

Распоредувањето (групирањето) на k елементи од едно множество од n елементи ($k \leq n$) во групи, при што секоја група се разликува од друга само по различните елементи во нивниот состав се нарекува **комбинирање**. Групите од елементи, подмножества од даденото множество, кои се разликуваат едно од друго само по различните елементи во нивниот состав, а не и по редоследот, се нарекуваат **комбинации**. Значи комбинациите се подмножества од варијациите. Слично како кај варијациите и комбинациите можат да бидат од 1-ва класа ако имаат еден елемент, од 2-ра класа ако имаат два елемента и т.н. Исто така, има комбинации со и без повторување во зависност од тоа дали еден ист елемент во една група се повторува повеќе пати или не.

1. Комбинации без повторување

Дефиниција. Секое подмножество од k елементи на множеството $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ се нарекува комбинација без повторување од k -та класа од дадениите n елементи на множеството M .

Од оваа дефиниција следува дека кај комбинациите е битно присуството на елементите, а не нивниот редослед. Бројот на комбинациите без повторување од n елементи од k -та класа се бележи со C_n^k .

Формирањето на комбинациите без повторување од n елементи од k -та класа, како и одредувањето на нивниот број ќе го прикажеме на следниов пример.

► **Пример 1.** Да ги формираме сите комбинации без повторување од 1-ва, 2-ра, 3-та и 4-та класа од елементите на множеството $\{a, b, c, d\}$ и да го најдеме нивниот број.

Решение. Комбинации без повторување од 1-ва класа се самите елементи:

$a \quad b \quad c \quad d$

Нивниот број е $C_4^1 = 4$.

Комбинации без повторување од 2-ра класа ќе добиеме ако ги формираме сите варијации без повторување од 2-ра класа и потоа ги отфрлиме оние со еднакви елементи:

$ab \quad ac \quad ad \quad ba \quad bc \quad bd \quad ca \quad cb \quad cd \quad da \quad db \quad dc$

Комбинации без повторување од 2-ра класа се: ab, ac, ad, bc, bd, cd . Вкупно 6.

Како може да го одредиме нивниот број?

Бројот на варијациите без повторување од 2-ра класа е $V_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$. Според начинот на добивање на комбинации без повторување од 2-ра класа, гледаме дека овде покрај секоја комбинација се јавуваат и сите нејзини пермутации, а тој број е $P_2 = 2!$. Значи: $V_4^2 = C_4^2 \cdot P_2$,

од каде: $C_4^2 = \frac{V_4^2}{P_2}$, затоа комбинации без повторување од 2-ра класа има: $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Комбинации без повторување од 3-та класа ќе добиеме ако ги формираме сите варијации без повторување од 3-та класа и потоа ги отфрлиме оние со еднакви елементи:

$abc \quad abd \quad acb \quad acd \quad adb \quad adc \quad bac \quad bad \quad bca \quad bcd \quad bda \quad bdc$
 $cab \quad cad \quad cba \quad cbd \quad cda \quad cdb \quad dab \quad dac \quad dba \quad dbc \quad dca \quad dcb$

Комбинации без повторување од 3-та класа се: abc, abd, acd, bcd . Вкупно 4.

Бројот на комбинациите без повторување од 3-та класа ќе го одредиме како погоре. Имено, бројот на варијациите без повторување од 3-та класа е: $V_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Според начинот на добивање на комбинации без повторување од 3-та класа, гледаме дека и овде покрај секоја комбинација се јавуваат и сите нејзини пермутации, а тој број е $P_3 = 3!$. Значи:

$V_4^3 = C_4^3 \cdot P_3$, од каде: $C_4^3 = \frac{V_4^3}{P_3}$, затоа комбинации без повторување од 3-та класа има:

$$C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 4.$$

Комбинација без повторување од 4-та класа е само една и тоа: $abcd$, значи: $C_4^1=1$. ■

На сличен начин се формираат и се доаѓа до бројот на комбинациите без повторување од n елементи k -та класа, т.е во општ случај $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_n}$, односно:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Со проширување на дробката со $(n-k)!$ се доаѓа и до следната формула за пресметување на бројот на комбинациите без повторување од n елементи k -та класа:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

► **Пример 2.** Ако еден клас има 10 предмети и 5 различни часови дневно, на колку начини можеме да ги распределиме часовите за еден ден?

Решение. Бидејќи во задачата не се бара редоследот на часовите во еден ден, туку само бројот на начини за распределување на различните предмети во еден ден, ќе имаме комбинации без повторување и тоа може да го направиме на:

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 252 \text{ начини.} \blacksquare$$

► **Пример 3.** Од 12 испитни прашања ученикот треба да избере 5. На колку начини може да го направи изборот?

Решение. Овде станува збор за избор каде не е битен редоследот, затоа ова се комбинации, се разбира без повторување, од 12 елементи и тоа од 5-та класа. Значи изборот можеме да го направиме на:

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792 \text{ начини.} \blacksquare$$

► **Пример 4.** На шаховски натпревар учесниците 14 играчи. Секој од нив со останатите одиграл по две партии. Колку партии се одиграни?

Решение. Кога секој од 14-те играчи со секого од останатите би одиграл по една партија би имале C_{14}^2 партии, но бидејќи секој од нив со останатите одигрува по две партии ќе бидат одиграни:

$$2C_{14}^2 = 2 \cdot \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 182 \text{ партии.} \blacksquare$$

► **Пример 5.** Од 10 среќки на брза лотарија точно 3 сигурно носат добивка. Ако купиш 6 среќки колку различни можности имаш за да имаме барем една добивка?

Решение. Од 10 среќки 3 можеме да избереме на C_{10}^3 начини. Од 10-те среќки 7 немаат добивка. Тројката која не добива можеме да ја избереме на C_7^3 начини. Значи имаме сигурна добивка во една од:

$$C_{10}^3 - C_7^3 = 85 \text{ комбинации. Провери!} \blacksquare$$

2. Комбинации со повторување

Нека е дадено множеството $M = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ од n елементи. Ако при формирањето на комбинации од k -та класа од n елементи постои можност секој елемент во секоја комбинација да се појави 1, 2, 3, ... или k пати, тогаш таквите комбинации се нарекуваат комбинации со повторување. Класата k може да биде помала, еднаква или поголема од бројот на елементите n .

Бројот на комбинациите со повторување од n елементи k -та класа го бележиме со $\overline{C}_n^k$.

Постапката за добивање комбинации со повторување од n елементи k -та класа можеме да ја покажеме на следниов пример.

➤ **Пример 1.** Да ги формираме комбинациите со повторување од 2-ра и 3-та класа од елементите на множеството $\{1, 2, 3, 4\}$.

Решение. Комбинации со повторување од 2-ра класа од даденото множество се:

11 12 13 14 22 23 24 33 34 44.

Додека комбинации со повторување од 3-та класа од даденото множество се:

111 112 113 114 122 123 124 133 134 144

222 223 224 233 234 244

333 334 344

444. ■

Бројот на комбинациите со повторување од n елементи k -та класа се пресметува според формулата:

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}, \text{ овде може } k > n$$

Провери го бројот на комбинациите со повторување во примерот 1!

➤ **Пример 2.** Дадено е множеството $A = \{a_1, a_2\}$. Да го најдеме бројот комбинации со повторување од 2-ра и 3-та класа, како и да ги формираме нив.

Решение.

Бројот комбинации со повторување од 2-ра класа е $\overline{C}_2^2 = \frac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!} = \frac{3!}{2!} = 3$

и тоа се комбинациите: $a_1 a_1$ $a_1 a_2$ $a_2 a_2$.

Бројот комбинации со повторување од 3-та класа е $\overline{C}_2^3 = \frac{(2+3-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$

и тоа се комбинациите: $a_1 a_1 a_1$ $a_1 a_1 a_2$ $a_1 a_2 a_2$ $a_2 a_2 a_2$. ■

➤ **Пример 3.** Колку триаголници можеме да формираме ако сираниите на триаголниците имаат за должина една од вредностите: 4, 5, 6, 7?

Решение. Тука станува збор за комбинации од 3-та класа, бидејќи се едно е која страна која должина ќе ја има, а бидејќи може две или три страни да имаат иста должина ќе имаме комбинации со повторување и тоа:

$$\overline{C}_4^3 = \frac{(4+3-1)!}{3!(4-1)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 3!} = 20 \text{ триаголници. } \blacksquare$$

➤ **Пример 4.** Колку елементи се потребни за да формираме 190 комбинации со повторување од 2-ра класа?

Решение. Бидејќи $\overline{C}_n^2 = 190$, имаме: $\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = 190$, односно $\frac{(n+1)n}{2} = 190$. од каде ја добиваме квадратната равенка $n^2 + n - 380 = 0$, чии решенија се 19 и -20. Одговорот е 19. зошто! ■

➤ **Пример 5.** Да го пресметаме n ако $C_{n+2}^3 : \overline{C}_{n-2}^3 = 15 : 7$.

Решение. Од условот на задачата имаме:

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{3 \cdot 2 \cdot 1} : \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 15 : 7, \text{ а оттука ја добиваме квадратната равенка:}$$

$$4n^2 - 33n + 8 = 0. \text{ при што само решението } n=8 \text{ ги задоволува условите на задачата. } \blacksquare$$

➤ **Пример 6.** Автобус со 12 патиници застанува на четири станици. На колку начини можат да излезат патиниците на станиците, во зависност само од бројот на патиниците кои излегуваат на одделни станици?

Решение. Нека со бројот n ($n = 1, 2, 3, 4$) го означиме секој излезен патник на n -та станица. Притоа се добиваат групи од по 12 елементи. На пример, групата елементи 111223333344 значи дека на првата станица излегле 3, на втората 2, на третата 5 и на четвртата станица 2 патника. Бидејќи елементите во групите можат да се повторуваат (на една станица можат да излезат повеќе патници), а редоследот на тоа кој патник излегува не е важен, имаме комбинации со повторување од 4 елементи од 12-та класа. Нив ги има:

$$\overline{C}_{12}^4 = \frac{(4+12-1)!}{12!(4-1)!} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12! \cdot 3 \cdot 2} = 455.$$

Одговорот на задачата е дека дванаесетте патници, во зависност само од нивниот број, на четирите станици можат да излезат на 455 начини. ■

ЗАДАЧИ

1. Од елементите на множеството $M = \{1, 2, 3, 4\}$ формирај ги сите комбинации без повторување од прва, втора, трета и четврта класа.
2. Новоотворената продавница на конкурс бара 5 продавачи. На него се јавиле повеќе лица. Само 9 лица ги задоволувале условите. На колку начини може да се изврши конечниот избор?
3. Одреди го бројот на дијагоналите во конвексен дванаесетаголник?
4. На еден шаховски натпревар се одиграни 210 партии. Одреди го бројот на учесниците ако се знае дека секој учесник одиграл по една партија со секој од другите.
5. Во рамнината се дадени 10 различни точки од кои ниедна тројка не е колинеарна. Одреди го бројот на сите прави кои ќе одредени со дадените точки?
6. Во множеството од 8 точки постојат точно 5 тројки колинеарни точки. Колку различни прави можеш да одредиш со дадените точки?
7. Во класот има 16 девојки и 20 машки. За раководството на одделенската заедница потребно е да се изберат 4 ученици од кои барем една девојка. На колку начини може да се направи изборот?
8. Во играта Лото од 39 различно нумерирани топчиња се извлекуваат 7 и едно дополнително. Колку обични ливчиња треба да пополниш ако сакаш да имаш сигурна седумка?
9. Во цвекарницата има 8 видови цвеќе. На колку начини можеш да го направиш изборот ако во букетот сакаш да има 5 цвета?
10. Бројот на комбинациите со повторување од 2-ра класа е поголем за 15 од бројот на елементите. Колку елементи има?

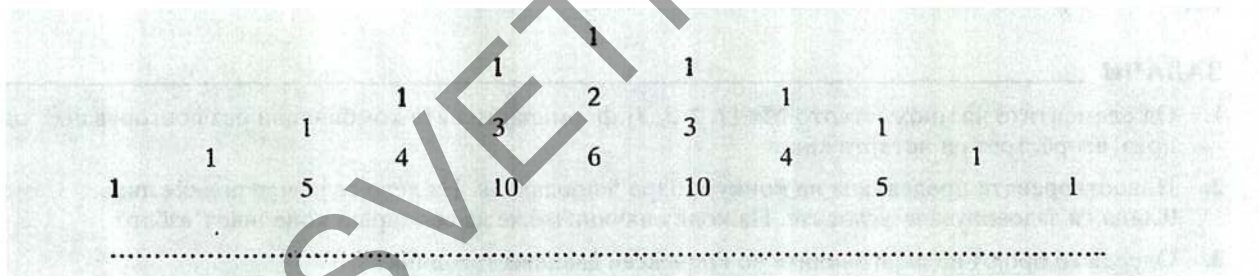
3.1.5. БИНОМНА ФОРМУЛА

Биномната формула е општа формула со чија помош се пресметува изразот $(a+b)^n$, каде $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Некои специјални случаи на биномната формула ни се познати. На пример, ако го степенуваме биномот $(a+b)$ по ред со броевите: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... добиваме:

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1 \\(a+b)^1 &= a+b \\(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\&\dots\end{aligned}$$

При степенувањето на биномот $(a+b)$ во секој ред можеме да ги забележиме следниве правилности:

- 1) биномот $(a+b)$ степенуван со природниот број n има $n+1$ членови,
- 2) кај секој член во развојот, збирот на степените показатели на првиот и вториот множител е n ,
- 3) показателот кај првиот множител опаѓа од n до 0, а кај вториот расте од 0 до n ,
- 4) коефициентите од степените на биномот $(a+b)$ можат да се пресметаат со помош на следнава шема:



Оваа шема е позната под името Паскалов триаголник, во чест на математичарот Блез Паскал (1623-1662) кој ги проучувал својствата на тој триаголник за потребите на неговите истражувања на полето на теоријата на веројатноста. Инаку овој триаголник им бил познат на Кинезите повеќе векови пред тоа, за што постојат пишувани документи.

Можеме да ги забележиме следниве својства на Паскаловиот триаголник:

- а) коефициентите во секој ред се симетрично распоредени,
- б) секој ред започнува и завршува со 1,
- в) збирот на кои било два последователни коефициенти го дава коефициентот што се наоѓа во следниот ред во средината помеѓу избраните коефициенти.

Со помош на Паскаловиот триаголник можеме да ги одредиме коефициентите на степенот $(a+b)^n$, за кој било природен број n , само ако се знаат коефициентите на степенот $(a+b)^{n-1}$. Но, ако n е голем број, со користење на оваа шема се усложнуваат пресметките. Затоа, во практика се користи поедноставен начин за пресметување на коефициентите на

биномот $(a+b)^n$. За таа цел, да ги разгледаме комбинациите без повторување од n елементи од k -та класа. За броевите $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ е воведена ознаката $\binom{n}{k}$ (читаме n над k), каде што $0 \leq k \leq n$, т.е. $C_n^k = \binom{n}{k}$. Значи,

$$\binom{n}{0} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n,$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3 \cdot 2(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!1!} = n,$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

Доколку ги пресметаме броевите $\binom{n}{k}$ за соодветните вредности на n и k , ќе забележиме дека тоа се токму коефициентите од степените на биномот $(a+b)$ претставени и во Паскаловиот триаголник. На пример, за $n=5$ имаме:

$$\binom{5}{0}=1, \quad \binom{5}{1}=5, \quad \binom{5}{2}=\frac{5 \cdot 4}{2}=10, \quad \binom{5}{3}=\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2}=10, \quad \binom{5}{4}=5, \quad \binom{5}{5}=1.$$

Затоа за биномот $(a+b)^5$ можеме да запишеме:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Согледуваме дека општата формула за степенот на биномот $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$, може да се зпише во вид:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Точноста на оваа формула ќе ја докажеме со методот на математичка индукција.

Доказ:

1^o. За $n=1$ формулата е точна бидејќи:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a+b$$

2^o. Претпоставуваме точноста за $n=k$:

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \dots + \binom{k}{k}b^k.$$

Да ја провериме точноста на формулата за $n=k+1$.

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k \cdot (a+b) = \left(\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \dots + \binom{k}{k}b^k \right) \cdot (a+b), \text{ од каде}$$

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right] a^k b + \dots + \left[\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right] a^{k+1-i} b^i + \dots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right] a b^k + \binom{k}{k} b^{k+1}.$$

Имаме $\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}$, за $i=2, 3, \dots, k$. Провери! Освен тоа важи и :

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1 \text{ и } \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1, \text{ затоа:}$$

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \dots + \binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i + \dots + \binom{k+1}{k}a b^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}.$$

а тоа, според методот на математичка индукција, значи дека формулата (1) е точна за секој природен број. ■

Формулата (1) се нарекува биномна или Њутнова биномна формула, во чест на математичарот и физичар Исак Њутн (1642 - 1727), за кој се смета дека прв ја докажал и систематски ја применувал во многу поширока смисла отколку што е овде изложено.

➤ **Пример 1.** Да го напишеме во развиен вид степенот $(2a+3b)^5$.

Решение. Да ја примениме биномната формула:

$$\begin{aligned} (2a+3b)^5 &= \binom{5}{0}(2a)^5 + \binom{5}{1}(2a)^4(3b) + \binom{5}{2}(2a)^3(3b)^2 + \binom{5}{3}(2a)^2(3b)^3 + \binom{5}{4}(2a)(3b)^4 + \binom{5}{5}(3b)^5 = \\ &= 32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

➤ **Пример 2.** Да го напишеме во развиен вид степенот $(1-3y)^4$.

Решение. Според биномната формула $a=1$, $b=-3y$, $n=4$, затоа имаме:

$$(1-3y)^4 = \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}1^3 \cdot (-3y) + \binom{4}{2}1^2 \cdot (-3y)^2 + \binom{4}{3}1 \cdot (-3y)^3 + \binom{4}{4}(-3y)^4 = 1 - 12y + 54y^2 - 108y^3 + 81y^4. \quad \blacksquare$$

➤ **Пример 3.** Со помош на биномната формула да го пресметаме збирот

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Решение. Ако во биномната формула $(a+b)^n$ ставиме: $a=1, b=1$, добиваме:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

➤ **Пример 4.** Да го определиме петтиот член во развојот на биномот $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})^{12}$.

Решение. Петтиот член да го означиме со T_5 . Него можеме да го пресметаме според формулата: $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Во нашиот пример $n=12, k=4, a=x^{\frac{1}{2}}, b=x^{\frac{2}{3}}$, затоа:

$$T_5 = \binom{12}{4} (x^{\frac{1}{2}})^{12-4} \cdot (x^{\frac{2}{3}})^4 = 495(x^{\frac{1}{2}})^8 \cdot x^{\frac{8}{3}} = 495x^{\frac{20}{3}} = 495x^6\sqrt[3]{x^2}.$$

ЗАДАЧИ

- Најди го збирот: а) $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \dots + \binom{10}{10}$, б) $\binom{10}{0} - \binom{10}{1} + \dots + \binom{10}{10}$.
- Напиши ги во развиен вид степените: а) $(3+2x)^5$, б) $(2x-5)^4$, в) $(x-\frac{1}{x})^6$, г) $(x+\sqrt{y})^8$.
- Најди го петтиот член во развојот на биномот $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^7$.
- Најди го седмиот член во развојот на биномот $(x+\sqrt{2})^{12}$.
- Најди го средниот член во развојот на биномот $(x-2y)^8$.
- Најди ги средните два члена во развојот на биномот $(2x+y)^{11}$.
- Најди го оној член од развојот на биномот $(x+\sqrt{x})^8$ кој содржи x^5 .
- Во развојот на биномот $(x^2 + \frac{1}{x})^9$ најди го оној член што не зависи од x .
- Најди го бројот на оној член во развојот на биномот $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{b})^{14}$ во кој a и b имаат еднакви показатели.
- Разликата меѓу третиот и вториот биномен коефициент во биномот $(a+b)^n$ е 44. Најди го n .

3.2. ВЕРОЈАТНОСТ

Во секојдневието често за некој настан велиме дека е многу веројатен, веројатен, малку веројатен или не е веројатен. Исто така, постојат многу моменти во животот кога треба да донесеш одлука врз основа на проценката за шансата т.е. веројатноста, дека некој настан ќе се случи. Делот од математиката што ги изучува законитостите за настапување на овие настани се нарекува **теорија на веројатноста**. Таа утврдува правила за пресметување со веројатностите како бројни големини, т.е. истражува квантитативни односи меѓу веројатностите за настапување на тие настани. Теоријата на веројатноста најнапред се појавува во врска со хазардните игри, потоа математичарот Јакоб Бернули (1654-1705) ја применувал при анализирањето на грешките што се прават при набљудувањата. Нејзината аксиоматска основа (1933 год.) ја поставува рускиот математичар Андреј Колмогоров (1903-1987).

3.2.1. ЕКСПЕРИМЕНТ. НАСТАН. СТАТИСТИЧКА ВЕРОЈАТНОСТ

Проучувањето на природата и општеството е резултат на различни испитувања, набљудувања - **експерименти**, при што се реализираат (исполнуваат) одредени множества услови, резултати - **настани**. Ако експериментите се организираат и изведуваат во лабораторија, тогаш зборуваме за *дејтерминиран* (одреден, ограничен) *експеримент*. Ако експериментаторот има пасивна улога при набљудувањето на настанот кој настапува под влијание на многу познати или непознати фактори, тогаш зборуваме за *недејтерминиран експеримент*. На пример, настани се: резултати од различни мерења на температурата на воздухот, телесната температура на човекот, неговата тежина, појавата на *џрб* или *џисмо* на горната страна од фрлената паричка, одреден број *џочки* на горната страна на фрлената коцка за играње, избраниот производ за проверка на исправноста при неговото производство, да не е дефектен и др.

Ако настанот настапува при секое изведување на некој експеримент, тогаш тој се нарекува **сигурен настан**. На пример, ако во непровидна кеса се наоѓаат десет бели топчиња, настанот *извлекување на бело џойче* е сигурен настан.

Ако настанот не настапува при ниедно изведување на некој експеримент, се нарекува **невозможен настан**. На пример, при фрлање коцка за играње (со страни нумерирани од 1 до 6) настанот *џаѓање на седмица* е невозможен настан.

Ако настанот при изведувањето на некој експеримент може, но не мора да настапи, се нарекува **случаен настан**. На пример, ако во непровидна кеса се наоѓаат пет бели и три црни топчиња, настанот *извлекување на бело џойче* е случаен настан.

Токму интересирањето на човекот за предвидување на настапување на случајните настани довело до појава и развој на веројатноста како наука. Од интерес за неговиот живот се настапувањата на различни настани: број на зафатени линии на телефонската централа, број на космички честичи кои ќе паднат на одредена површина во одредено време, наследни особини на одредена растителна култура, во поново време и број на вулкански ерупции на одреден вулкан, број и интензитет на земјотреси на одредено подрачје. Искуството покажува дека *можностите за наситување на некои од овие настани не се секогаш еднакви*, имено, тие зависат од многу познати или непознати околности. Тоа значи дека не постојат идеално еднакви услови за настапување на некој настан при одреден експеримент, затоа се јавува потреба од оценување на веројатноста за настапување на некој настан по изведувањето на серија експерименти.

На пример, да го набљудуваме раѓањето на деца како масовна појава и сакаме да го испитаме настаниот A , раѓање на деца од машки пол, во групите од по 1000 новороденчиња. Нека n е бројот на сите новородени деца, во нашиот случај $n = 1000$, а m е бројот на новороденчиња од машки пол. При испитувањето на повеќе групи од по 1000 новороденчиња, се забележува дека количникот $\frac{m}{n}$ варира околу еден приближно константен број 0.511. Овој количник е еден вид показател карактеристичен за тоа колку често се случува настанот A (раѓање на деца од машки пол) и се нарекува **релативна честота (фреквенција)** за настанот A .

Дефиниција 1. Релативна фреквенција на даден настан A се нарекува бројот $\frac{m}{n}$ каде m е бројот на експериментите при кои настанот A се случил, а n е бројот на сите експериментите.

Многу законитости во биологијата, хемијата, физиката и другите науки се откриваат со анализирање на резултатите од голем број експерименти. На пример, во еден од своите експерименти австрискиот ботаничар Г. Ј. Мендел (1822-1884) при вкрстување на жолти со жолти грашок забележал добивање на зелен грашок. И тоа, од 34153 вкрстувања, зелен грашок добил во 8506 случаи. Значи релативната честота на овој настан е: $\frac{m}{n} = \frac{8506}{34153} \approx 0.252$.

Така Мендел дошол до заклучок дека при доволно голем број експерименти, во една четвртина од случаите значи, на секои четири вкрстувања на жолт со жолт грашок се добива зелен грашок. Ова и други негови откритија помогнале да ја основа и разработи теоријата за наследните особини кај билките и пошироко.

Значи, искуството покажува дека ако некој експеримент се повторува во голем број серии и за секоја серија се одредува релативната фреквенција на настанот A , тие (релативните фреквенции) покажуваат тенденција да се групираат (осцилираат) околу еден број, кој ќе го означиме со $P(A)$ и ќе го нарекуваме **статистичка веројатност** на настаниот A , (P е првата буква од латинскиот збор *probabilitas* што значи веројатност).

Дефиниција 2. Статистичка веројатност на еден настан A е бројот $P(A)$ околу кој осцилира релативната честота на настаниот A при голем број експерименти.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Статистичката веројатност на настанот се одредува (само приближно) по реализирањето на настанот, затоа се нарекува **веројатност a posteriori** или **емпириска веројатност**, веројатност заснована на искуство. За разлика од неа, **веројатност a priori** или **теориска веројатност**, се одредува математички и тоа однапред. Со неа ќе се запознаеме подоцна преку класичната дефиниција за веројатност.

За статистичката веројатност, бидејќи $0 \leq m \leq n$, можеме да ги забележиме следниве својства:

- 1^o. Веројатноста на **сиѓурниот настан** е еднаква на 1, бидејќи $m = n$;
- 2^o. Веројатноста на **невозможниот настан** е еднаква на 0, бидејќи $m = 0$;
- 3^o. Веројатноста на **случајниот настан** A е $0 \leq P(A) \leq 1$.

Меѓу првите примери за наоѓање на веројатноста на некој настан се подолу наведените.

➤ **Пример 1.** Францускиот блаќородник Де Мер забележал дека при истовремено фрлање на три коцки за играње оној кој се обложува на збир 11 добива почестно отколку оној кој се обложува на збир 12. Значи на современ јазик можеме да кажеме статистички, бидејќи стапува збор за хазардна игра во која тој многу пати учествувал, но сепак не извршил прецизно мерење. При тоа, тој размислувајќи дошол до заклучок дека и едниот и другиот број се добиваат на 6 различни начини, но не можел да ја разреши дилемата, затоа му се обршил на својот пријател, математичарот Блез Паскал (1623-1662). Настанот се случил во 1654. година, која се смета за година на почетокот на развојот на теоријата на веројатноста.

Блез Паскал покажал дека размислувањето на Де Мер е точно, но не целосно. Останало забележано неговото решение за овој проблем. Решението ќе биде дадено кога ќе ги проучиме основите на поимот веројатност.

➤ **Пример 2.** Математичарот Ј. Керих, во заробеништво за време на II светска војна, извел 10 серии од по 1000 фрлања на паричка и ги добил следниве појавувања на жрбот од паричката: 502, 511, 497, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 509 пати.

Бидејќи во овој случај $n = 1000$, соодветните релативни фреквенции за настапување на настанот, појавување на жрб, се:

0,502; 0,511; 0,497; 0,529; 0,504; 0,476; 0,507; 0,528; 0,504; 0,509.

Значи, релативните фреквенции се групираат околу бројот 0,5 што претставува статистичка веројатност за настапување на настанот појавување на жрб при експериментот фрлање на паричка во висина.

➤ **Пример 3.** Експериментот е фрлање коцка за играње. Случајниот настан A_i е на жорната страна на коцката да се појават i точки ($i=1,2,3,4,5,6$). Тоа е направено со: 600, 6000, 60000 и 120000 фрлања. Добиените резултати се прикажани во следнива табела:

број фрлања	1	2	3	4	5	6
600	82	130	106	92	106	84
6 000	953	1053	1027	1028	982	957
60 000	9880	9989	9888	10206	10190	9847
120 000	19759	20065	19795	20232	20213	19936

Релативните фреквенции за настапување на настаните A_i ($i=1,2,3,4,5,6$) се дадени во следнава табела:

број фрлања	1	2	3	4	5	6
600	0,14	0,22	0,18	0,15	0,18	0,14
6 000	0,159	0,176	0,171	0,171	0,164	0,160
60 000	0,165	0,166	0,165	0,170	0,170	0,164
120 000	0,165	0,167	0,165	0,169	0,168	0,166

Оваа табела јасно покажува дека релативните фреквенции за настапување на настаните A_i како експериментално добиени големини, секоја посебно со своите вредности осцилира околу бројот $\frac{1}{6} = 0.166...$, кој природно и интуитивно ни се наметнува како веројатност за настапување на настанот појавување на 1,2,3,4,5 или 6 точки на горната страна од фрлената коцка за играње. Може да се забележи и дека поголема прецизност се добива кога бројот на фрлањата е поголем.

► **Пример 4.** Од 96721 триесетгодишни луѓе, педесетгодишна година ја преживуваат 88043. Колкава е веројатноста еден избраник од нив да ја доживее педесетгодишната?

Решение. Бидејќи бројот на педесетгодишни луѓе е $m = 88043$, а бројот на сите испитаници е $n = 96721$, веројатноста триесетгодишникот да ја преживее педесеттата е:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{88043}{96721} = 0.91.$$

ЗАДАЧА. Изведи експерименти.

1. Во три серии од по 100 фрлања, фрлај коцка за играње. Определи ја веројатноста за појавување на бројот 5?
2. Во две серии од по 100 фрлања, фрлај две парички истовремено. Определи ја веројатноста да се појави писмо и на двете парички?

ПАСКАЛ, БЛЕЗ (Pascal Blaise) (1623-1662) - француски математичар, физичар, филозоф и писател. Роден во богато семејство, се движи во високите политички, уметнички и научни кругови. Во шеснаесеттата година докажува една теорема од геометријата, денес позната како *големата теорема на Паскал*. Во осумнаесеттата година ја осмислува и изработува првата *сметачка машина* во историјата, која може да ги извршува основните аритметички операции. Подоцна, освен со математика се занимава и со физички експерименти во врска со притисокот на воздухот. Денес, *единицата за мерење на притисок* го носи неговото име. Во своите зрели години, по обимни размислувања ја создава својата *теорија на веројатност*. Од овие истражувања произлезе и триаголникот од броеви, коефициенти пред членовите на бином од произволен степен, денес познат како *Паскалов триаголник*. Кон крајот на својот живот, за да заборава на забоболката од која страда, осум дена се занимава со геометрија на кривата *циклоида*. Тогаш, предавајќи ѝ се на математиката, успева да реши многу од главните проблеми во врска со неа. Сестран, останува трајно забележан во светот на научната мисла.

3.2.2. МНОЖЕСТВО НА СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ

Во случаите кога настаните на нивното појавување се со еднакви можности, ќе зборуваме за **еднакви можни настани** (настани за чие настапување постојат еднакви услови). На пример, ако коцката за играње е геометриски правилна и направена од хомоген материјал, настаните *паѓање на страна со овој или оној број точки* се еднакви можни; исто така при фрлањето на хомогена паричка настаните *паѓање на грб или лицев* се еднакви можни. Да напоменеме дека настаните: *паѓање на страна со овој или оној број точки*, *паѓање на грб или лицев* се нарекуваат **елементарни настани** за соодветниот експеримент. Множеството од сите елементарни настани во еден експеримент се нарекува **множество од елементарни настани** кое го означуваме со Ω . Настаните што не можат истовремено да настанат велиме дека **заемно се исклучуваат (дисјунктни настани)**. На пример, при фрлањето на паричка настанот *паѓање на грб* го исклучува настанот *паѓање на лицев*. Постојат и настани кои **заемно не се исклучуваат**. На пример, при извлекување на два лоза, настаните *добивка на првиот лоз* и *добивка на вториот лоз* не се исклучуваат.

➤ **Пример 1.** Да го одредиме множеството на елементарни настани при фрлање метална паричка.

Решение. Паричката има две страни означени со *грб* и *лицев*, значи множеството на елементарните настани е $\Omega = \{g, p\}$.

➤ **Пример 2.** Да го одредиме множеството на елементарни настани при истовремено фрлање на две коцки за играње, црна и бела.

Решение. Знаеме дека секоја страна од коцката е означена со точки од 1 до 6. Ако со (a, b) го означиме настанот: *на црната коцка на горната страна паднале a точки, а на белата коцка b точки*, множеството на елементарни настани Ω е составено од 36 елементарни настани што заемно се исклучуваат:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6);
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6);
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6);
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6);
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6);
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6). ■

Елементарните настани, како што кажува и нивното име, не можат да се сведат на уште поедноставни настани, но со најмалку два од нив можат да се формираат **сложени настани**.

Со случајните настани, врзани за даден експеримент, можеме да изведуваме операции аналогни на операциите со множества. Затоа за два случајни настана A и B можеме да ги дефинираме следниве релации и операции.

Дефиниција 1. Ако при секое настанување на настанот A , настанува и настанот B , тогаш велиме дека настанот A го повлекува (имплицира) настанот B , или B го содржи A и означуваме $A \subset B$.

На пример, во експериментот фрлање коцка за играње нека A биде настанот: појавување на бројот 6, а B настанот: појавување парен број. Бидејќи 6 е парен број јасно е дека важи релацијата $A \subset B$.

Дефиниција 2. Збир на настани A и B е оној настан кој се појавува кога се реализира барем еден од настаниите A или B , нешто го обележуваме со $A + B$ или $A \cup B$.

Дефиниција 3. Производ на настани A и B е оној настан кој се појавува кога истовремено се реализира секој од настаниите A и B , нешто го обележуваме со $A \cdot B$ или $A \cap B$.

Дефиниција 4. Разлика на настаниите A и B е оној настан кој се појавува кога истовремено се реализира настанот A и не се реализира настанот B , нешто го обележуваме со $A \setminus B$.

Да забележиме дека операциите со случајни настани важат и за повеќе од два настана.

► **Пример 3.** Да ги определиме збирот, производот и разликата на настаниите A и B во експериментот фрлање коцка за играње, ако A е настанот: појавување на првиот број, а B настанот: појавување на парен број.

Решение. Настанот A се состои од елементарните настани $\{2,3,5\}$, додека настанот B се состои од елементарните настани $\{2,4,6\}$, збирот на овие настани ќе биде: $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$, производот на овие настани ќе биде: $A \cap B = \{2\}$, а разликата $A \setminus B$ на овие настани ќе биде: $A \setminus B = \{3,5\}$, додека разликата: $B \setminus A = \{4,6\}$. ■

Да забележиме дека за даден експеримент, ако A е случаен настан, тогаш разликата $\Omega \setminus A$ е **спротивен настан**, кој ќе го означуваме со $\bar{A}$.

► **Пример 4.** Три стрелци ницанати во една цел. Нека A_i е настанот: i -иот стрелец ја погодил целта, за $i = 1,2,3$. Нека B е настанот: два стрелца ја погодиле целта, C е настанот: барем еден стрелец ја погодил целта и D е настанот: само еден стрелец ја погодил целта. Да ги претставиме настаниите B, C и D со помош на елементарните настани A_i , ($i = 1,2,3$).

Решение. Настанот B значи два стрелца ја погодиле целта, на пример првиот и вториот, а третиот не ја погодил целта, што ќе го означиме со $A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$. Ако ги земеме во обзир и другите две можности ќе добиеме:

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Настанот C значи: целта е погодена од кој било стрелец т.е.:

$$C = A_1 + A_2 + A_3.$$

Додека настанот D ќе биде:

$$D = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3. \blacksquare$$

За да можеме да ја одредиме веројатноста за настапување на еден случаен настан потребно е уште да се запознаеме со поимот **поволен настан**. На пример, ако при експериментот извлекување топче од непровидна кеса со еднакви топчиња, од кои 5 се црвени а 4 сини, посакаме извлеченото топче да биде црвено и навистина извлечеме црвено топче, случајниот настан *извлечено е црвено топче* ќе биде **поволен настан**. Додека случајниот настан *извлечено е сино топче* ќе биде **неповолен настан** за овој експеримент.

ЗАДАЧИ

1. Определи го множеството елементарни настани во експериментот кој се состои во фрлање *паричка* *три* *пати* во висина. Кои елементарни настани се поволни за настанот *A*: *двајпати* *појавување* *герб*, а еднаш *лисмо*?
2. Една *паричка* и една *коцка* за *играње* се *фрлени* *одеднаш*. Определи го множеството елементарни настани во експериментот?
3. Изведен е експеримент *избирање* на две *бројки* од *броевите* 1,2,3,4,5, на следниов начин: најнапред е избран еден број, а потоа вториот број е избран од преостанатите четири броја. Определи го множеството елементарни настани Кои од нив се поволни за настанот: *избрани* се *два* *нејари* *броја*?
4. Случајниот експеримент е: *едновременно* *извлекување* на *три* *шайчиња* од *нејровидна* *кеса*. Во неа има 2 бели (b_1, b_2), 2 црвени (c_1, c_2) и едно сино топче (s). Определи ги настаните:
а) *тријте* *шайчиња* се со *различна* *боја*,
б) *од* *тријте* *шайчиња*, *две* се *црвени*.
5. Машина за проверување на исправноста на производите е конструирана така што во случај на неисправен производ дава звучен сигнал. Се проверуваат 3 производи, опиши ги настаните:
A: *само* *еден* *производ* е *исправен*; *B*: *барем* *еден* *производ* е *исправен*;
C: *точно* *два* *производа* се *исправни*; *D*: *барем* *два* *производа* се *исправни*.
6. Експериментот е: *фрлање* *коцка* за *играње* во *висина*. Нека настанот *A* е: *појавување* *нејарен* *број*, а настанот *B*: *појавување* *број* *делив* со 3. Одреди ги настаните: Ω , $A \cup B$, $A \cap B$ и $\bar{A} \cap \bar{B}$.
7. Се фрлаат истовремено две *коцки* за *играње*. Нека настанот *A* е: *појавување* на *јарен* *број* на *двете* *коцки*; *B*: *збиорот* на *броевите* е 8; *C*: *двајта* *броја* се *исти*. Одреди ги настаните: A , B , C , $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $B \cup C$.
8. Случајниот експеримент е: *фрлање* *коцка* за *играње*. Настанот *A*: *појавување* *број* *не* *помал* од 3 и *јасно* *не* *поголем* од 6, а *настанот* *B*: *појавување* *број* *поголем* од 1 и *не* *поголем* од 4. Најди ја разликата на настаните *A* и *B*.

БЕРНУЛИ, ЈАКОБ (Bernoulli Jakob) (1654-1705) – професор по математика во Базел (Швајцарија), еден од осумте математичари на познатото семејство Бернули. Се занимава со новите идеи во математиката на своето време. Дава голем придонес во развивањето на диференцијалното сметање, има голема заслуга во основањето на варијационото сметање. Од големо значење е и придонесот на Јакоб во теоријата на веројатноста. Во 1689. го открива законот на големите броеви, т.н. Бернулиева теорема. Неговите трудови од оваа област се сместени во делото *Вештина на поготување*, издадено во 1713., осум години по неговата смрт. Тој е најкарактеристичен пример за тоа како наследноста и околината играат огромна и рамноправна улога во создавањето на генијални личности.

3.2.3. КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТА

Видовме дека настаните од множеството на елементарни настани при даден експеримент се единствено можни, еднакво можни и заемно се исклучуваат, а знаеме и како се одредува нивниот број, како и бројот на повољните настани па можеме да ја искажеме т.н. **класична дефиниција за веројатноста**. Таа се однесува на веројатност за случување на настан која се одредува однапред и затоа, како што веќе кажавме, се нарекува *веројатност a priori* и претставува логичка претходница на познавањето на настаните од секојдневниот живот.

Дефиниција. За даден експеримент, каде сите елементарни настани од множеството на елементарни настани се еднакво можни, веројатност за случување на настанот A , се нарекува бројот $P(A)$ кој претставува однос на бројот p од повољните елементарни настани за дадениот настан A и бројот n на сите елементарни настани од множеството на елементарни настани.

$$P(A) = \frac{p}{n}$$

За веројатноста на сигурниот настан, кога сите елементарни настани се повољни за настанот A , имаме $p = n$, па $P(\Omega) = 1$.

За веројатноста на невозможниот настан, кога ниеден од елементарните настани не е повољен за настанот A , имаме $p = 0$, па $P(\emptyset) = 0$.

Бидејќи: $0 \leq p \leq n$, за веројатноста на случајниот настан A важи $0 \leq P(A) \leq 1$.

Уште да забележиме дека за веројатноста на спротивниот настан $\bar{A}$, на настанот A важи $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

► **Пример 1.** Правилна шаричка се фрла во висина. Колкава е веројатноста да се појави $\bar{p}$ б?

Решение. Да го означиме настанот појавување $\bar{p}$ б со A . Бројот на елементарни настани од множеството од елементарни настани е $n = 2$, бројот на повољни настани $p = 1$, значи бараната веројатност ќе биде: $P(A) = \frac{p}{n} = \frac{1}{2} = 0.5$.

► **Пример 2.** Колкава е веројатноста при фрлање коцка, нумерирана со точки од до 6, да се појави: а) парен број, б) број помал од 5, в) кој било број од 1 до 6, г) бројот 10, д) да не се појави бројот 4.

Решение. Бројот на сите елементарни настани е $n = 6$, тоа се елементите од множеството: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

а) Настанот A е: појава на парен број. Повољни настани се $\{2, 4, 6\}$, значи нивниот број е $p = 3$, затоа: $P(A) = \frac{p}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$;

б) Настанот B е: појава на број помал од 5. Повољни настани се $\{1, 2, 3, 4\}$, значи нивниот број е $p = 4$, затоа: $P(B) = \frac{p}{n} = \frac{4}{6} = 0,6666\dots$;

в) Настанот C е: појава на кој било број од 1 до 6. Поволни настани се $\{1,2,3,4,5,6\}$, значи нивниот број е $p = n = 6$, затоа имаме веројатност на сигурен настан, односно: $P(C) = 1$;

г) Настанот G е: појава на бројот 10. Тоа е невозможен настан, па затоа $P(G) = 0$;

д) Настанот D е: не се појавува бројот 4. Веројатноста да се појави бројот 4 е $\frac{1}{6}$, затоа

веројатноста на нему спротивниот настан, настанот D е: $P(D) = 1 - \frac{1}{6} = 0.8333... \blacksquare$

➤ **Пример 3.** Фрлени се две коцки за играње, нумерирани од 1 до 6. Колкава е веројатноста дека ќе падне: а) збир 8, а разлика 4, б) збир 5, а производ 4.

Решение. Овде вкупниот број елементарни настани на множеството од елементарни настани е $n = 6^2 = 36$, (зошто!).

а) Бројот на елементарни настани, поволни за настанот A : збир 8, а разлика 4 ќе биде $p = 2$ и тоа се настаните: $\{(2,6),(6,2)\}$; затоа веројатноста на бараниот настан A ќе биде:

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0.0555... \blacksquare$$

б) Бројот на елементарни настани, поволни за настанот B : збир 5, а производ 4 е исто така $p = 2$ и тоа се настаните: $\{(1,4),(4,1)\}$; веројатноста на бараниот настан B ќе биде ист број:

$$P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0.0555... \blacksquare$$

➤ **Пример 4.** Во една кутија има 15 предмети еднакви по форма и големина, од кои 10 се обоени. Од кутијата со случаен избор извлекуваме три предмети. Колкава е веројатноста дека сите извлечени предмети ќе бидат обоени?

Решение. Овде настанот A е: извлечени се три обоени предмети. Вкупниот број елементарни настани на множеството од елементарни настани е еднаков на бројот на комбинации од 3-та класа без повторување од 15 елементи, т.е $n = C_{15}^3 = 455$. Бројот на елементарни настани поволни за настанот A ќе биде $p = C_{10}^3 = 120$. Затоа веројатноста на бараниот настан е:

$$P(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91} = 0.2637... \blacksquare$$

Да ја завршиме темата, во делот за веројатност за која сега ги имаме почетните сознанија, со проблемот поставен на почетокот во примерот 1 од 3.2.1.

➤ **Пример 5.** Проблемот на Де Мер.

Решение. Збирот на горната страна на трите фрлени коцки за играње може да биде еден од броевите од 3 до 18 и притоа ги имаме следниве можности за добивање збир 11 и 12:

$$11 = 6+4+1 = 6+3+2 = 5+4+2 = 5+5+1 = 4+4+3 = 3+3+5.$$

$$12 = 6+5+1 = 6+4+2 = 5+4+3 = 6+3+3 = 5+5+2 = 4+4+4.$$

Резултатот сите три собироци се различни, може да се појави на $3!=6$ различни начини.

Резултатот два собирока се еднакви, може да се појави на 3 начина.

Резултатот сите три собироци се еднакви, може да се појави на само еден начин.

Затоа:

збирот 11 се добива на $3! + 3! + 3! + 3 + 3 + 3 = 6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 3 = 27$ начини.

збирот 12 се добива на $3! + 3! + 3! + 3 + 3 + 1 = 6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 1 = 25$ начини.

И бидејќи бројот на сите можни елементарни настани се варијации со повторување од 6 елементи трета класа, чиј број е $\sqrt[6]{6^3} = 6^3 = 216$, за веројатностите имаме:

$$P(11) = \frac{27}{216} = 0,125 \wedge P(12) = \frac{25}{216} = 0,11574.$$

Значи Де Мер правилно забележал дека во играта при истовремено фрлање три коцки, збирот 11 се добива почесто отколку збирот 12, а зошто е тоа така одговорил Б. Паскал, чие решение, се разбира со современи математички ознаки, го презентиравме во овој пример. ■

ЗАДАЧИ

1. Случајно е избран природен број не поголем од 10. Определи ја веројатноста избраниот број да биде прост.
2. Паричка е фрлена три пати. Определи ја веројатноста да се појави писмо точно два пати.
3. Најди ја веројатноста случајно избраниот природен број, кој не е поголем од 100, да биде степен со показател поголем од 1 на некој природен број.
4. Радиоцевка се состои од три дела: решетка, катода и анода. При проверка на исправноста на производот мора да се испита исправноста на секој дел поединечно. Колкава е веројатноста радиоцевката да биде исправна.
5. Правилна паричка се фрла во висина двапати. Колкава е веројатноста:
а) да не падне ниеден грб; б) да падне еден грб; в) да паднат два грба?
6. Одреди ја веројатноста за појавување на збир 8, при едновременно фрлање на две коцки за играње.
7. Колкава е веројатноста при експериментот: *фрлање 2 коцки за играње*, барем еднаш да се појави 6.
8. Меѓу 20 предмети 7 се неисправни. Случајно одеднаш се избираат 5 предмети. Одреди ја веројатноста меѓу нив да нема неисправни.
9. Во една кутија се наоѓаат 6 бели и 4 црни топчиња. Оdedнаш се извлечени 3 топчиња. Колкава е веројатноста сите три да бидат со иста боја?
10. Во една кутија се наоѓаат 3 бели, 7 црвени и 8 сини топчиња. Колкава е веројатноста при едновременно извлекување на две топчиња едното да биде бело, а другото црвено?

3. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

Со математичка индукција докажи дека важи:

1. а) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = n(2n-1)$, б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. а) $9 \mid (7^n + 3n + 8)$, б) $5 \mid (n^5 - n)$.

3. $3^n \geq 2n + 1$, $n \geq 1$.

4. Пресметај: $7! \left(\frac{6!}{8!} + \frac{4!}{6!} \right) - 8! \left(\frac{7!}{9!} - \frac{4!}{7!} \right)$.

5. Реша ги равенките: а) $\frac{x!}{(x-1)!} = 9$, б) $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 132$.

6. Скрати ги дробките: а) $\frac{n!}{(n+1)! - n!}$, б) $\frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+2)!}$.

7. Пресметај: а) $\binom{6}{2} + \binom{6}{4}$; б) $\binom{9}{3} - \binom{9}{6}$; в) $\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4}$.

Реша ги равенките:

8. а) $\binom{x+1}{2} : \binom{x}{3} = 4:5$; б) $\binom{x}{1} + \binom{x+4}{2} = 162$.

9. $V_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$.

10. $9V_x^3 = 5 \bar{V}_x^3$.

11. Колку природни броеви поголеми од 4000 можеш да напишеш од цифрите 2,3,5,6 ако не ги повторуваш?

12. На колку начини можеш да распоредиш 6 луѓе: а) на една клупа, б) на тркалезна маса?

13. На колку различни начини можеш да пополниш ливче за спортска прогноза ако има 12 средби?

14. Колку железнички станици има на една пруга ако за разни патувања постојат 552 различни билети, не сметајќи ја цената?

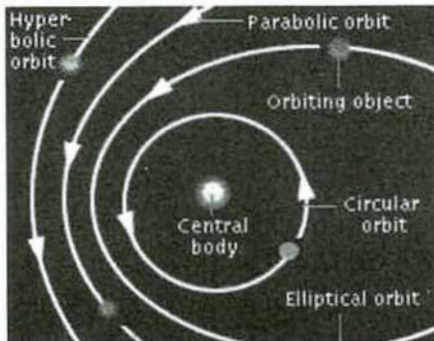
15. Дадени се 9 точки во просторот, од кои никои 3 не се на иста права и никои 4 не се во иста рамнина. Определи го бројот на: а) прави, б) триаголници, в) тетраедри кои можеш да ги формираш од дадените точки.

16. Осум ученици се квалификувале за учество на училиштен квиз. На колку начини можеш да формираш: прва, втора, трета и четврта двочлена екипа од осумте ученици?
17. Напиши го во развиен вид степенот $(2a + 3b)^5$.
18. Кој е осмиот член во развојот на биномот $(2\sqrt{x} - x\sqrt{8})^{10}$.
19. Најди го средниот член во развојот на биномот $\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^{16}$.
20. Најди го оној член во развојот на биномот $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^9$ кој не го содржи x .
21. Во лифт на петспратна зграда влегуваат 3 лица. Секој од нив излегува на кој било спрат (почнувајќи од првиот) со еднаква веројатност. Пресметај колкава е веројатноста:
 - а) сите да излезат на третиот спрат;
 - б) сите да излезат истовремено;
 - в) сите да излезат на различни спратови.
22. Од шпил од 52 карти случајно се извлекуваат две карти. Одреди ја веројатноста тие да се деветка и десетка.
23. Во еден сад се наоѓаат 9 бели, 8 црвени и 7 сини топчиња. Колкава е веројатноста истовремено да не извлечеш 2 сини топчиња?
24. Имаш пет отсечки со должина од 2, 4, 5, 7, 9 единици. Одреди ја веројатноста од три случајно избрани отсечки дека ќе можеш да конструираш триаголник.
25. Студентот дошол на испит знаејќи 85 од 100 прашања. На испитот добил ливче со три прашања. Одреди ја веројатноста дека студентот ќе ги знае сите прашања.
26. При пукање со пушка релативната фреквенција за погодување на целта е 0.90. Најди го *бројот на појави* ако е пукано 230 пати во целта?

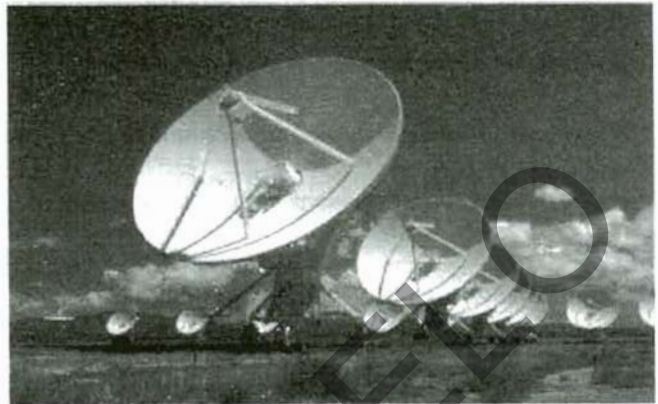
КОЛМОГОРОВ, АНДРЕЈ НИКОЛАЕВИЧ (1903-1987) – руски математичар, академик.

Полето на научниот интерес на Колмогоров опфаќа повеќе области на математиката и тој објавува дела од сите нив. Меѓутоа, најголем е неговиот придонес во теоријата на веројатноста, тој успева да реши повеќе проблеми од оваа област и да конструира аксиоматско засновање на теоријата на веројатноста. Познати се Колмогоровите закони за големи броеви и тестовите за статистички хипотези. Овие проблеми, произлезени од потребите на секојдневното живеење ги разработува и решава, а подоцна ги објавува во делото *Основни поими на теоријата на веројатноста*, 1933. Како творец и педагог тој останува забележан во анализите на современата математика.

ПРИРОДА. ЖИВОТ. МАТЕМАТИКА. 4.



Небесни орбитии



Да ја слушаме Вселената!

Вселената е огромно, бескрајно пространство, кое најдобро се опишува во математичка смисла: колку и да е далеку најновото откриено небеско тело, оддалечено многу светлосни години, има небески тела подалеку и од него, а потоа и од него итн. Она што го гледаме на небесниот свод над нас е само еден дел од неизмерната вселена. Во тоа бескрајно пространство се движат најразновидни небески тела, и што е најважно, тоа движење е извонредно правилно, се врши по точно определени патеки- траектории. За просторите поблиску до нас тие се определени според планетарните законитости, а за просторите подалеку од нас според законите на звездите и другите небески тела: планетоиди, сателити, астероиди, комети, метеори, маглини и други.

Предизвик, секако!

Траекториите на небеските тела ќе ги испитуваме во оваа тема, тоа се кривите од втор ред- конусните пресеци: кружница, елипса, хипербола, парабола. Но најнапред во темата што следи, *аналитичката геометрија*, ќе стане збор за правата. Во основата на аналитичката геометрија лежи методот на координати, кој овозможува решавање на геометриски задачи со помош на апаратот на алгебрата. Еве една таква:

Задача

Траекторијата на едно тело е елипсата $2x^2 + 5y^2 = 40$, друго тело се движи праволиниски со траекторија правата $x - y + 20 = 0$. Возможно ли е да се судри?

Решение

Траекториите, секако, ќе ги разгледуваме во ист правоаголен координатен систем.

Елипсата ја запишуваме во видот: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{8} = 1$. нејзината равенка ја делиме со 40 и потоа ја средивме.

Оттука можеме да видиме дека $a^2 = 20$, а $b^2 = 8$ (a - голема полуоска, b - мала полуоска на елипсата); со ова ќе се запознаеш во темата што следи.

Правата ја запишуваме во каноничен вид: $y = x + 20$, од каде $k=1$, $n=20$ (k -коефициент на правец, n -отсечокот што правата го отсекува од y -оската); ова го знаеш од порано.

Ако добиените податоци ги замениме во условот за допир на елипса со права: $a^2 k^2 + b^2 - n^2 = 0$, ќе добиеме: $20 \cdot 1 + 8 - 400 < 0$ ($\neq 0$). Заклучуваме дека правата нема заеднички точки со елипсата, т.е. е надвор од елипсата. *Ура! Нема судир!*

Одговорите на прашањата, што секако ги имаш, (тука има многу нови работи за тебе), ќе ги најдеш меѓу содржините што следат.

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Аналитичката геометрија е дел од математиката кој ги изучува геометриските фигури и нивниот заемен однос со помош на методите на алгебрата.

Две основни задачи на аналитичката геометрија се:

- ако е дадено множество точки во рамнината или просторот, дефинирано со одреден број геометриски својства, да се состави неговата равенка.
- ако е дадена равенка која како променливи ги содржи координатите на точките, да се најде множеството точки и да се конструира неговиот график.

Со втората задача се имаш запознаено во претходните години при изучување на линеарната и квадратната равенка. Така на пример, веќе знаеш дека со равенката $y = ax + b$ е определена линеарната функција чиј график е права во рамнината, а со равенката $y = ax^2$ е определена квадратната функција чиј график е парабола со теме во координатниот почеток а е симетрична во однос на y -оската.

Овде главно ќе се задржиме на определување на равенките на права и кривите од втор ред (кружница, елипса, хипербола и парабола) врз основа на нивните геометриски својства, користејќи ги притоа основните врски меѓу алгебрата и геометријата претставени во следнава табела:

Алгебарски	Геометриски
1. (x, y) подредена двојка реални броеви.	1. точка со координати x и y
2. линеарна или квадратна равенка со две променливи	2. права или крива од втор ред како множество на точки (Г.М.Т)
3. подредена двојка броеви (x, y) бројно ја задоволуваат линеарната или квадратната равенка со две променливи	3. точката Т со координати (x, y) лежи на права или крива од втор ред
4. решение на систем од две линеарни или квадратни равенки со две непознати или една линеарна и една квадратна	4. пресек на две прави или две криви од втор ред или права и крива од втор ред во рамнината

4.1. КООРДИНАТИ НА ТОЧКА И ВЕКТОР ВО ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ.

4.1.1. ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

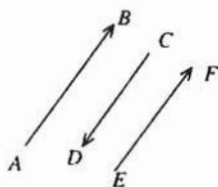
1. За примената на математиката во различни области има потреба бројната оска и правоаголниот координатен систем да ги дефинираме со помош на вектори. За таа цел прво накучо да се потсетиме на некои својства на векторите кои ти се познати од прва година.

Производ на векторот $\vec{a}$ со скалар k е вектор $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ кој е колинеарен со векторот $\vec{a}$, има должина $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$, и е исто насочен со $\vec{a}$ ако $k > 0$ а спротивно насочен ако $k < 0$.

Оттука непосредно следува следното тврдење: односој на два колинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е реален број k , позитивен или негативен број зависно од тоа дали $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се исто насочни или спротивно насочни, а апсолутната вредност е еднаква на односој од должините на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Значи, ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни вектори, тогаш важи:

$$1^\circ \frac{\vec{b}}{\vec{a}} = k; \quad 2^\circ k > 0 \text{ ако } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ се истонасочни, и}$$

$$k < 0 \text{ ако } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ спротивно насочни; } 3^\circ \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = |k|.$$



црт.1

На црт.1 се прикажани колинеарните вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ и за нив важи:

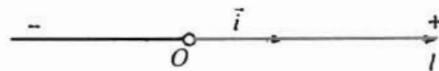
$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}} > 0, \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} < 0, \quad \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{EF}} < 0$$

Вектор со должина единица се вика **единичен вектор** или **орт**.

Согласно со горните тврдења, ако $\vec{e}$ е единичен вектор кој е колинеарен со векторот $\vec{a}$, тогаш:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e} \text{ ако } \vec{e} \text{ и } \vec{a} \text{ се истонасочни, и } \vec{a} = -|\vec{a}| \cdot \vec{e} \text{ ако } \vec{e} \text{ и } \vec{a} \text{ се спротивно насочни.}$$

Дефиниција 1. Правата l на која е избрана почетна точка O и единичен вектор $\vec{i}$ ја викаме **оска** или **линеарен координатен систем**, и ја означуваме со $(O, \vec{i})$ или Ol (црт.2).



црт.2

Дефиниција 2. Алгебарска мера на вектор $\overrightarrow{AB}$, кој лежи на оската $(O, \vec{i})$ или е колинеарен со неа, е еднаква на односој на векторот $\overrightarrow{AB}$ и единичниот вектор $\vec{i}$ на оската и ја означуваме со $\overline{AB}$. Значи

$$\overline{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}}. \quad (1)$$

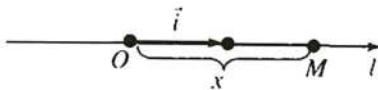
Бидејќи $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \vec{i}$ или $\overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot \vec{i}$, следува

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}} = \pm |\overrightarrow{AB}| \quad (2)$$

што значи, алгебарската мера на векторот е број еднаков на должината на векторот земена со знак "+" или "-", зависно од тоа дали векторот има иста или спротивна насока со единичниот вектор на оската.

Нека M е произволна точка на оската $(O, \vec{i})$ (црт.3)

Дефиниција 3. Координата за точката M на оската $(O, \vec{i})$ е алгебарската мера на векторот $\overrightarrow{OM}$.



црт.3

Значи, ако $OM = x$, тогаш x е координата на M , што симболички го запишуваме со $M(x)$ и притоа важи

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} \quad (3)$$

Помеѓу реалните броеви и точките од оската $(O, \vec{i})$ постои обратно еднозначно соодветство. На секоја точка $M \in (O, \vec{i})$ одговара единствен вектор $\overrightarrow{OM}$ па според тоа и единствен реален број x кој е координата за M и, обратно, на секој реален број одговара единствен вектор $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$, па според тоа и единствена точка $M(x)$ на оската кој е слика на тој број.

Нека $A(x_1)$ и $B(x_2)$ се две точки на оската $(O, \vec{i})$ (црт.4). Да ја определиме алгебарската мера и должината на векторот $\overrightarrow{AB}$ преку координатите на крајните точки.

Согласно со правилото за собирање на вектори, имаме:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

но, $\overrightarrow{OB} = x_2 \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{OA} = x_1 \cdot \vec{i}$, па добиваме

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} = x_2 \cdot \vec{i} - x_1 \cdot \vec{i} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i}$$

од каде следува

$$\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1 \quad (4)$$

Значи, алгебарската мера на векторот $\overrightarrow{AB} \in (O, \vec{i})$ е еднаква на разликата од координатите на крајната и почетната точка.

За должината на векторот $\overrightarrow{AB}$, од (2) и (4), добиваме:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}| = |x_2 - x_1| \quad (5)$$

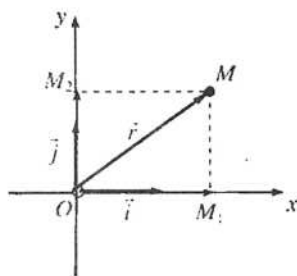
Но, бројот $|\overline{AB}|$ во исто време го претставува и растојанието $d(A, B)$ помеѓу точките $A(x_1)$ и $B(x_2)$, па имаме:

$$d(A, B) = |\overline{AB}| = |x_2 - x_1| \quad (6)$$

► **Пример 1.** Да ја определиме алгебарската мера и должината на векторот $\overline{AB}[A(3), B(-5)] \in (O, \vec{i})$.

Решение. Согласно со формулата (4), алгебарската мера е: $\overline{AB} = (-5) - 3 = -8$, а од (5) за должината имаме $|\overline{AB}| = |\overline{AB}| = |-8| = 8$.

2. Дефиниција 4. Множеството од две заемно нормални оски $Ox \equiv (O, \vec{i})$ и $Oy \equiv (O, \vec{j})$, каде $\vec{i}$ и $\vec{j}$ се единични вектори на оските, претставува **правоаголен координатен систем** во рамнината. Го означуваме со $(O, \vec{i}, \vec{j})$ или xOy . Точката O е координатен почеток, оската $(O, \vec{i})$ **абсцисна оска**, а $(O, \vec{j})$ **ординатна оска**.



црт.5

Нека $M(x, y)$ е произволна точка во рамнината со избран координатен систем xOy (црт.5).

Дефиниција 5. Векторот $\overline{OM}$, чиј почеток е во координатниот почеток а крај во точката M , се вика **радиус вектор** за точката M и вообичаено го означуваме со $\vec{r}_M$ или само $\vec{r}$.

Да ги определиме координатите на векторот $\overline{OM}$ во однос на координатниот систем $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Нека M_1 и M_2 се ортогоналните проекции на точката M на Ox и Oy оската, соодветно. Тогаш $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$ се ортогоналните проекции на векторот $\overline{OM}$ на Ox и Oy оската. Од црт.5 гледаме дека

$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1M} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2}$$

Нека $\overline{OM_1} = x$, $\overline{OM_2} = y$, тогаш $\overline{OM_1} = x \cdot \vec{i}$, $\overline{OM_2} = y \cdot \vec{j}$, па од последното равенство добиваме:

$$\overline{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \quad (7)$$

и во тој случај велиме дека радиус векторот $\overline{OM}$ е **разложен** по единичните вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Реалните броеви x и y се **координати** на радиус векторот $\overline{OM}$, и пишуваме

$$\overline{OM} = (x, y).$$

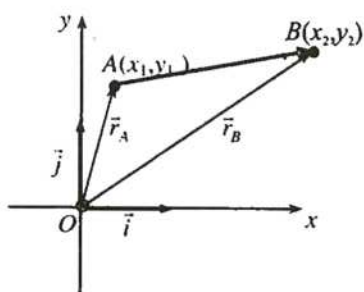
Но, координатите x и y се во исто време и координати на точката M , па следува: **координатите на радиус векторот $\overline{OM}$ се еднакви со координатите на крајната точка M .**

Векторите $x \cdot \vec{i}$ и $y \cdot \vec{j}$ ги викаме **компоненти на векторот $\vec{OM}$** во правец на координатните оски Ox и Oy , соодветно, а записот (7) го викаме разложување на векторот $\vec{OM}$ по компоненти.

► **Пример 2.** Да ги одредиме координатите на радиус векторот за точката $M(-3,5)$, и да го претставиме по неговите компоненти.

Решение. Координатите на радиус векторот $\vec{OM}$ се: $x = -3$, $y = 5$ т.е. $\vec{OM} = (-3, 5)$, а претставен по компоненти е: $\vec{OM} = (-3)\vec{i} + 5\vec{j}$.

Да ги определиме сега координатите на произволен вектор во однос на координатниот систем $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



црт.6

Нека е даден векторот $\vec{AB}$ со координатите на крајните точки: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ (црт.6). Нека координатите на $\vec{AB}$ се (x, y) , т.е.

$$\vec{AB} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

За радиус векторите $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ на точките A и B , согласно со (7), имаме:

$$\vec{r}_A = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}, \quad \vec{r}_B = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}$$

Од правилото за одземање на вектори имаме

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}$$

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1 \quad (8)$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Значи, координатите на вектор зададен со координатите на крајните точки, ги добиваме кога од координатите на крајната точка ги одземеме соодветните координати на почетната точка.

Јасно е дека за нултиот вектор двете координати се нула, т.е.

$$\vec{0} = (0, 0) = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$$

► **Пример 3.** Да ги определиме координатите и компонентните вектори за векторот $\vec{AB}$ [$A(-5, 1)$, $B(3, 2)$].

Решение. За дадените координати на точките $x_1 = -5$, $y_1 = 1$; $x_2 = 3$, $y_2 = 2$, координатите на векторот се: $x = 3 - (-5) = 8$, $y = 2 - 1 = 1$, а компонентните вектори се $8\vec{i}$ и $\vec{j}$. Значи, $\vec{AB} = (8, 1)$ или разложен по компонентите: $\vec{AB} = 8\vec{i} + \vec{j}$.

➤ **Пример 4.** Да ги определиме координатите на единичните вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Решение. Единичниот вектор $\vec{i} = \overrightarrow{OE_1}$ е радиус вектор за точката $E_1(1,0)$, а единичниот вектор $\vec{j} = \overrightarrow{OE_2}$ е радиус вектор за точката $E_2(0,1)$, па следува

$$\vec{i} = (1,0), \quad \vec{j} = (0,1) \quad \text{т.е.} \quad \vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}, \quad \vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}.$$

ЗАДАЧИ

1. На оската $(O, \vec{i})$ конструирај ги точките $A(2)$, $B(-3)$ и $C(-\frac{5}{2})$ а потоа определи ја алгебарската мера на векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.
2. Дадени се точките $M_1(1)$ и $M_2(6)$. Одреди ја алгебарската мера на векторот $\overrightarrow{M_2M_1}$.
3. На бројната оска конструирај точка симетрична на точката $M(4)$ во однос на почетната точка O .
4. Кои се координатите на радиус- векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, ако точките A, B, C и D имаат координати: $A(0,1)$, $B(-2,-7)$, $C(-4,5)$, $D(-8,0)$ и $O(0,0)$.
5. Кои се координатите на точките A, B, C , и D , ако нивните радиус вектори се: $\overrightarrow{OA} = (1,-2)$, $\overrightarrow{OB} = (0,7)$, $\overrightarrow{OC} = (-2,0)$ и $\overrightarrow{OD} = (-3,-4)$, соодветно.
6. Конструирај ги радиус векторите: $\overrightarrow{OA} = (2,0)$, $\overrightarrow{OB} = (0,2)$, $\overrightarrow{OC} = (1,1)$, $\overrightarrow{OD} = (-1,5)$ во координатната рамнина xOy .
7. Определи ги компонентите на векторите: а) $\vec{a} = 5\vec{i} - 9\vec{j}$ б) $\vec{b} = -7\vec{i}$ в) $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{j}$
8. Определи ги координатите на векторите: а) $\vec{a} = -4\vec{i} + 5\vec{j}$ б) $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ в) $\vec{c} = -5\vec{j}$
9. Почетната точка на векторот $\vec{a}$ е A . Определи ги координатите на крајната точка B ако е:
а) $A(0,0)$, $\vec{a} = (-2,1)$ б) $A(-1,5)$, $\vec{a} = (1,-3)$ в) $A(2,7)$, $\vec{a} = (-2,-5)$.

4.1.2. ОПЕРАЦИИ СО ВЕКТОРИ ЗАДАДЕНИ СО КООРДИНАТИ ВО КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

Операциите собирање на вектори, одземање на вектори, множење на вектор со број како и релациите за еднаквост и колинеарност на вектори веќе ти се познати од геометријата гледна точка. Ако векторите се зададени со нивните координати тогаш операциите и релациите меѓу нив се извршуваат врз основа на следниве теореми:

Теорема 1. Векторите $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$ се еднакви ако и само ако им се еднакви соодветните координати, т.е. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$.

Теорема 2. Координатите на збирот или разликата на векторите $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$ се еднакви на збирот или разликата на соодветните координати на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 + y_2) \cdot \vec{j}$
 $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 - y_2) \cdot \vec{j}$

➤ **Пример 1.** Да ги одредиме координатите на збирот и разликата на векторите $\vec{a}=(5,-3)$ и $\vec{b}=(-2,-4)$.

Решение. Заменувајќи ги координатите на дадените вектори во формулите за збир и разлика имаме:

$$\vec{a} + \vec{b} = (5-2) \vec{i} + (-3-4) \vec{j} = 3 \vec{i} - 7 \vec{j} \quad \text{т.е. } \vec{c} = (3, -7);$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (5-(-2)) \vec{i} + (-3-(-4)) \vec{j} = 7 \vec{i} + 1 \vec{j} \quad \text{т.е. } \vec{c} = (7, 1) \quad \blacksquare$$

Теорема 3. Векторот $\vec{a} = (x_1, y_1)$ се множи со бројот k ако секоја координата на векторот се помножи со бројот k , т.е.

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot (x_1, y_1) = (kx_1, ky_1) \quad \text{или} \quad k \cdot (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) = kx_1 \vec{i} + ky_1 \vec{j}$$

➤ **Пример 2.** Даден е векторот $\vec{a} = 8\vec{i} - 3\vec{j}$. Да ги одредиме координатите на векторот $\vec{b} = 5\vec{a}$.

Решение. Врз основа на исказаната теорема 4 добиваме:

$$\vec{b} = 5\vec{a} = 5(8\vec{i} - 3\vec{j}) = 40\vec{i} - 15\vec{j} \quad \text{или} \quad \vec{b} = (40, -15). \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

- Дадени се векторите: $\vec{a} = 5\vec{i} - 9\vec{j}$; $\vec{b} = -7\vec{i}$; $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{j}$. Провери дали важат равенствата:
а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ б) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- Дадени се векторите: $\vec{a} = -4\vec{i} + 5\vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{c} = 0\vec{i} - 5\vec{j}$. Одреди го векторот $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
- Опреди ги броевите m и n , ако е познато дека:
а) $8\vec{i} + 10\vec{j} = m\vec{i} + (2n + m)\vec{j}$; б) $m\vec{i} + n\vec{j} = (n+2)\vec{i} + (2m-1)\vec{j}$.
- Дадени се векторите: $\vec{a} = (8, -3)$ и $\vec{b} = (1, -8)$. Опреди ги координатите на векторите $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.
- Опреди ги координатите на векторот $\vec{a}$, ако $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ и $\vec{b} = (17, -2)$.
- Дадени се векторите $\vec{a} = (3, -4)$, $\vec{b} = (-1, 2)$ и $\vec{c} = (5, 3)$. Опреди ги координатите на векторите:
а) $3\vec{a} + 2\vec{b} - 5\vec{c}$; б) $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.
- Дадени се векторите $\vec{a} = (3, -2)$ и $\vec{b} = (-4, 6)$. Најди ги броевите α и β така што $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + 10\vec{j} = \vec{0}$.
- Опреди ги координатите на вектор, кој е еднаков на производот на бројот 6 и на векторот $\vec{a} = (2, -\frac{1}{3})$.

4.1.3. РАСТОЈАНИЕ МЕЃУ ДВЕ ТОЧКИ

Нека во рамнината со избран координатен систем $(O, \vec{i}, \vec{j})$ се дадени точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ (црт.1). Сакаме да го определиме растојанието d меѓу точките A и B . Бидејќи растојанието d е еднакво на должината (модулот) на векторот $\overline{AB}$,

$$d = |\overline{AB}|$$

треба всушност да ја определиме должината на векторот $\overline{AB} = (x, y)$.

Од правоаголниот триаголник ACB (црт.1), согласно со Питагоровата теорема, имаме:

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{AC}|^2 + |\overline{CB}|^2 \quad (1)$$

Бидејќи

$$|\overline{AC}| = |\overline{A'B'}| = |x_2 - x_1| \text{ и } |\overline{CB}| = |\overline{A''B''}| = |y_2 - y_1|,$$

со замена во (1) добиваме:

$$|\overline{AB}|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Значи, за определување на растојанието d помеѓу две точки ја добиваме формулата која ти е позната од прва година:

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2)$$

Специјално, за растојанието d од координатниот почеток O до произволната точка $M(x, y)$, кое е еднакво на должината на радиус векторот $\overline{OM}$ на точката M , имаме:

$$d = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

➤ **Пример 1.** Даден е векторот $\overline{AB} [A(3,5), B(-1,2)]$. Да ги определиме координатите на векторот, а потоа да ја пресметаме неговата должина.

Решение. Бидејќи $x_1 = 3, y_1 = 5; x_2 = -1, y_2 = 2$, добиваме

$$\overline{AB} = (-1-3)\vec{i} + (2-5)\vec{j} = -4\vec{i} - 3\vec{j} \text{ т.е. } \overline{AB} = (-4, -3),$$

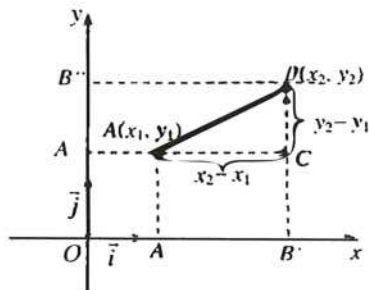
а должината на векторот е: $|\overline{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$.

➤ **Пример 2.** Да го најдеме растојанието меѓу точките $A(5,6)$ и $B(9,3)$.

Решение. Со директна примена на формулата за растојание добиваме:

$$d = \sqrt{(9-5)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

➤ **Пример 3.** Да провериме дали триаголникот со темиња $A(0,0)$, $B(-2,-2)$ и $C(-1,1)$ е правоаголен?



црт.1

Решение. Најнапред ќе ги најдеме должините на страните, па ако за добиените броеви важи Питагоровата теорема, тогаш триаголникот ABC е правоаголен. Имаме:

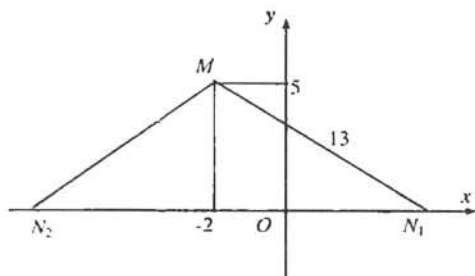
$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-1+2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

Бидејќи $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 8+2=10 = \overline{BC}^2$, триаголникот е правоаголен. ■

► **Пример 4.** На x -оската да определиме точка која е на растојание 13 единици од точката $M(-2,5)$.



црт.2

Решение. Точките на x -оската имаат ордината нула, па бараната точка е $N(x,0)$ каде x треба да се определи (црт.2). Бидејќи според условот $\overline{MN} = 13$, имаме:

$$13 = \sqrt{(x+2)^2 + (0-5)^2} \Leftrightarrow 169 = x^2 + 4x + 4 + 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 140 = 0$$

чиј решенија се $x_1 = 10$ и $x_2 = -14$. Значи има две точки што го задоволуваат условот на задачата $N_1(10,0)$ и $N_2(-14,0)$. ■

► **Пример 5.** Да го определиме центарот $S(x,y)$ на опишаната кружница околу триаголник со темиња $A(-2,-2)$, $B(5,-1)$, $C(-3,5)$, а потоа да го најдеме радиусот на кружницата.

Решение. Центарот $S(x,y)$ на опишаната кружница околу триаголникот е еднакво оддалечен од темињата на триаголникот, т.е. $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = R$ (R – радиус на кружницата). Бидејќи

$$\overline{SA} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2}; \overline{SB} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2}; \overline{SC} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2},$$

за определување на координатите x и y го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1} \\ \sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1} = \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 = x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 \\ x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 = x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + y = 9 \\ -8x + 6y = 4 \end{cases}$$

чије решение е $x = 1$, $y = 2$, па $S(1,2)$. Радиусот ќе го најдеме како растојание од центарот S до кое било теме на $\triangle ABC$, т.е. $R = \overline{SA} = \sqrt{(1+2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$. ■

ЗАДАЧИ

- Најди го растојанието меѓу точките:
а) $A_1(4,8)$ и $A_2(7,4)$; б) $M(2,-1)$ и $N(-1,4)$; в) $P(0,3)$ и $Q(4,0)$.
- Најди ги должините на страните на триаголникот ABC чии темиња се точките $A(6,3)$, $B(-2,9)$, $C(3,-3)$.
- Од сите точки кои од точката $A(10,6)$ се на растојание 5 единици, најди ја онаа чија ордината е 2.
- Точката M е y -оската. Определи ги координатите на точката M ако е еднакво оддалечена од точките $A(5,-1)$ и $C(-3,5)$.
- Докажи дека не постои точка што е еднакво оддалечена од точките $A(-5,5)$, $B(2,5)$ и $C(7,5)$. Што може да се каже за меѓусебната положба на тие точки?
- Дадени се координатите на две соседни темиња на квадратот $ABCD$; $A(-3,2)$, $B(-6,2)$. Најди ги координатите на другите две темиња.
- Најди ги должините на страните и должините на дијагоналите на четириаголник чии темиња се: $A(-5,0)$, $B(-7,2)$, $C(7,3)$, $D(5,-7)$.
- Провери дали четириаголникот чии темиња се точките:
а) $A(1,3)$, $B(2,1)$, $C(5,2)$, $D(4,4)$;
б) $A(1,1)$, $B(6,1)$, $C(5,4)$, $D(2,4)$;
в) $A(a,b)$, $B(b,a)$, $C(-a,b)$, $D(b,-a)$ е паралелограм.

4.1.4 Делење на отсечка во даден однос

Од геометријата е познато дека точката M која лежи на дадена отсечка AB , ја дели неа во некој однос $k = m:n$ ($k \neq -1$), односно важи равенството:

$$\overline{AM} : \overline{MB} = k.$$

Притоа ако точката M е меѓу точките A и B , делењето е **внатрешно**, а ако точката M е на продолжението на отсечката AB делењето е **надворешно** (црт.1).

Тука ја поставуваме следната задача: дадени се координатите на крајните точки на отсечката $AB[A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)]$, да ги определиме координатите на точката $M(x, y) \in AB$ која ја дели отсечката AB во даден однос $k = m:n$.

Ќе ги определиме координатите x и y на точката M од условот

$$\overline{AM} = k \cdot \overline{MB} \quad (k \neq -1) \quad (1)$$

За таа цел, ги изразуваме векторите $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ со радиус векторите на точките A, M и B . Од црт.1 имаме:

$$\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA}, \quad \overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} \quad (2)$$

Од равенствата (1) и (2) добиваме

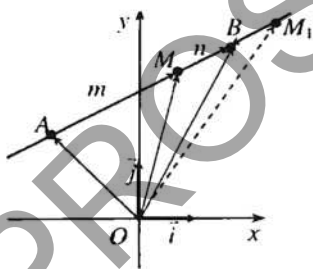
$$\overline{OM} - \overline{OA} = k(\overline{OB} - \overline{OM}) \Leftrightarrow \overline{OM} + k \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + k \cdot \overline{OB}$$

од каде

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + k \cdot \overline{OB}}{1+k} \quad (3)$$

Ако во (3) радиус векторите ги замениме со нивните координати:

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \overline{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \overline{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$



црт.1

врз основа на теоремите за операции со вектори, добиваме:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}} \quad (4)$$

Ако точката M е **средица** на отсечката AB , тогаш $k = 1$, па од (4) добиваме

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}} \quad (5)$$

Формулата (4) ја добивме земајќи дека M е внатрешна точка за отсечката AB . Бидејќи во овој случај векторите $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ се со иста насока од (1) следува дека $k > 0$. Ако пак M_1 е на продолжението на отсечката AB , тогаш $\overrightarrow{AM_1}$ и $\overrightarrow{M_1B}$ се со спротивна насока, па $k < 0$.

► **Пример 1.** Да ги определиме координатите на точката M која оисечката $AB[(1,3), B(4,6)]$ ја дели во однос 2:3.

Решение. Тука е $k = \frac{2}{3}$, па применувајќи ја формулата (4), добиваме

$$x = \frac{1 + \frac{2}{3} \cdot 4}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{11}{5}, \quad y = \frac{3 + \frac{2}{3} \cdot 6}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{21}{5}. \quad \text{Значи } M\left(\frac{11}{5}, \frac{21}{5}\right).$$

► **Пример 2.** Да ги определиме координатите на точката M која оисечката $AB[A(-3,1), B(2,5)]$ ја дели во однос $k = -3$.

Решение. Бидејќи $k = -3 < 0$, поделбата е надворешна. Од формулата (4) имаме

$$x = \frac{-3 - 3 \cdot 2}{1 - 3} = \frac{-3 - 6}{-2} = \frac{9}{2}, \quad y = \frac{1 - 3 \cdot 5}{1 - 3} = \frac{1 - 15}{-2} = 7. \quad \text{Значи, } M\left(\frac{9}{2}, 7\right).$$

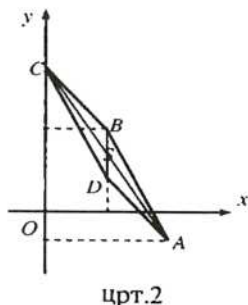
► **Пример 3.** Точката $M\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)$, ја дели оисечката AB во однос 1:3. Да ја определиме должината на оисечката AB , ако $A(2,3)$.

Решение. Од условот на задачата имаме $k = \frac{1}{3}$. Треба да ги најдеме координатите на точката B . Имаме:

$$\frac{1}{4} = \frac{2 + \frac{1}{3}x_2}{1 + \frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{6 + x_2}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_2 = -5; \quad \frac{5}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3}y_2}{1 + \frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{9 + y_2}{4} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow y_2 = 1, \text{ т.е. } B(-5, 1).$$

Должината на отсечката AB ќе биде $\overline{AB} = \sqrt{(-5-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$.

► **Пример 4.** Дадени се три темиња на паралелограмот $ABCD$: $A(4, -1)$, $B(2, 3)$ и $C(0, 5)$. Да го најдеме четвртиот теме D .



Решение. Нека е темето D со координати $D(x_4, y_4)$. Најнапред ќе ја определиме средината $S(x_s, y_s)$ на дијагоналата AC (црт.2): $x_s = \frac{4+0}{2} = 2$ и $y_s = \frac{-1+5}{2} = 2$. Значи $S(2, 2)$.

Но, точката S е средна точка и на дијагоналата BD (зошто?), па важи:

$$2 = \frac{2+x_4}{2} \Leftrightarrow x_4 = 2, \quad 2 = \frac{3+y_4}{2} \Leftrightarrow y_4 = 1. \text{ Значи } D(2, 1). \blacksquare$$

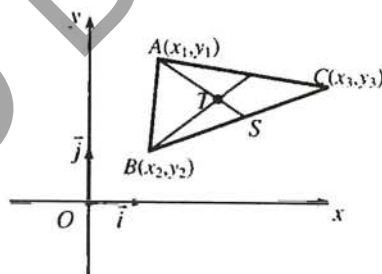
► **Пример 5.** Да докажеме дека координатите на тежиштитето $T(x_t, y_t)$ на $\triangle ABC$ [$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$], се наоѓаат со формулите:

$$x_t = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_t = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Решение. Координатите на средишната точка $S(x_s, y_s)$ на страната BC се:

$$x_s = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y_s = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

Познато ни е дека тежиштето $T(x_t, y_t)$ ја дели тежишната отсечка AS во однос $2:1$, т.е. $AT:TS = 2:1$, па согласно со формулите (4) добиваме:



црт.3

$$x_t = \frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{2}}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_t = \frac{y_1 + 2 \cdot \frac{y_2 + y_3}{2}}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

► **Пример 6.** Дадени се две темиња на триаголник $A(2, 3)$ и $B(4, -5)$ и координатите на тежиштитето $T(1, -3)$. Да го определиме третиот теме на триаголникот.

Решение. Нека третото теме е $C(x_3, y_3)$. Со замена во формулите за тежиштето добиваме: $1 = \frac{2+4+x_3}{3}$, $x_3 = -3$ и $-3 = \frac{3-5+y_3}{3}$, $y_3 = -7$. Значи $C(-3, -7)$. ■

ЗАДАЧИ

- Отсечката $AB[A(-2, 3), B(4, 6)]$ е поделена со точката M во однос $5:1$. Определи ги координатите на делбената точка.
- Определи ги координатите на точката C која ја располовува отсечката AB , ако координатите на A и B се: а) $A(1, 3)$, $B(5, 1)$; б) $A(-3, 0)$, $B(1, -3)$.
- Определи ги координатите на точката M која дадена отсечка AB ја дели во однос k :

а) $A(1,7), B(6,-3), k = \frac{2}{3}$; б) $A(2,3), B(-5,2), k = -\frac{1}{2}$.

4. Пресметај ги должините на тежишните линии на триаголникот ABC, ако $A(2,3), B(4,8), C(0,5)$.
5. Дадени се координатите на темињата на триаголникот ABC [$A(1,2), B(-5,-3), C(7,-4)$]. Најди ги координатите на средината на тежишната линија AA_1 .
6. Даден е паралелограм со темиња $A(2,4), B(5,7)$ и $C(12,8)$. Најди ги координатите на четвртото теме D.
7. Дадени се две темиња на паралелограм $A(-4,2), B(0,6)$ и пресечната точка на дијагоналите $O(2,4)$. Определи ги другите две темиња на паралелограмот.
8. Најди ги координатите на тежиштето и неговото растојание од координатниот почеток, на триаголник со темиња $A(1,2), B(3,4), C(4,1)$.
9. Отсечка со крајни точки $M_1(-6,-3)$ и $M_2(6,6)$ поделена е на три еднакви дела. Определи ги координатите на делбените точки и должината на секоја отсечка.
10. Точката $A(9,7)$ е едно теме на квадрат на кој дијагоналите му се пресекуваат во координатниот почеток. Определи ги координатите на преостанатите три темиња, како и должината на дијагоналата на квадратот.
11. Точките $M_1(2,-1), M_2(-1,4)$ и $M_3(-2,2)$ се средини на страните на триаголник ABC. Определи ги координатите на неговите темиња.
12. Тежиштето T на триаголникот ABC е на x-оската, две негови темиња се $A(2,-3), B(-5,1)$, а третото теме C е на y-оската. Определи ги координатите на T и C.
13. Докажи дека средната линија на трапез со темиња $A(-5,-2), B(10,3), C(2,5), D(-1,4)$ е еднаква на полубирот од паралелните страни.

ДЕКАРТ, РЕНЕ (Rene Descartes) (1596-1650) – француски филозоф и математичар. За Декарт најјасен и најточен јазик за изразување на научните вистини е јазикот на математиката. Дури и во филозофијата се труди да открие математички законитости, секое прашање и проблем да го сведе на математичко проучување. Со упорност и дисциплина, нему својствени, се обидува да воведо ред, да ги обедини сите математички дисциплини, да даде конкретни одговори на сите прашања. Но, сепак, неговата најголема заслуга во математиката се однесува на воспоставувањето тесна врска меѓу геометриските облици и алгебарските формули. Имено, со воопштување и обединување на методот на координати и алгебарската симболика на букви на кој е заснована аналитичката геометрија. Декарт ги отвори портите кон проучување на појави во повеќедимензионалните простори. Овој метод тој го применува само во дводимензионалниот простор, т.е. рамнината, но неговото проширување создава едно вистинско средство за спознавање и претставување на природата.

4.2. ПРАВА ВО РАМНИНА

За линеарната, квадратната, експоненцијалната, логаритамската и тригонометриската функција ја решаваме следнава задача: врз основа на равенката со која е зададена функцијата ги испитуваме својствата на функцијата и го конструираме нејзиниот график (геометриска претстава во рамнина).

Сега ја поставуваме спротивната задача: да ја составиме равенката на дадена линија (права или крива), врз основа на извесен број услови (својства) за таа крива.

Бидејќи координатите на произволна точка на линијата ја задоволуваат нејзината равенка, поставената задача се сведува на составување таква равенка меѓу променливите x и y што ќе ја задоволуваат координатите x и y на секоја точка од дадената линија, но не и координатите на точки што не лежат на неа.

Врз основа на кажаното равенката на дадена права ја определуваме така што составуваме равенка која ја задоволуваат само координатите на точките што и припаѓаат на таа права.

На пример, со равенката $y = x$ е зададено множеството точки со заедничко својство: ајсцисата и ординатата се меѓу себе еднакви. Тоа множество е правата што е симетрала на првиот и третиот квадрант. Ниедна друга точка што го нема тоа својство не припаѓа на тоа множество.

Исто така, со равенката $y = x^2$ е определено множеството точки од рамнината кои имаат заедничко својство: ординатата на која било точка е еднаква на квадратот на апцисата на таа точка. Точките со ова својство лежат на кривата - парабола со теме во координатниот почеток, и ниту една точка што не е на неа не го исполнува дадениот услов.

При тоа една иста права во зависност од условите што ја определуваат нејзината положба во однос на даден правоаголен координатен систем можеме да ја претставуваме со различни равенки на права.

Условите со чија помош е определена положбата на правата во правоаголен координатен систем ги викаме **определувачки параметри**.

Овде ја имаме токму таа задача да ги определиме различните видови равенки на права во зависност од дадените определувачки параметри.

4.2.1 ЕКСПЛИЦИТЕН И ОПШТ ВИД РАВЕНКА НА ПРАВА

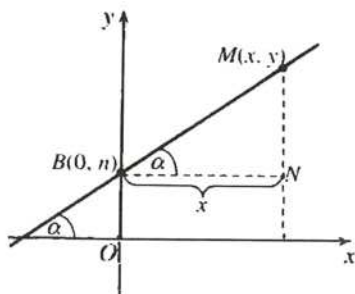
1. Нека положбата на правата l е определена со:

1° отсечокот n што правата го отсекува на Oy оската, т.е. со точката $B(0, n)$, и

2° аголот α што правата го зафаќа со позитивната насока на Ox оската (црт.1).

Претпоставуваме дека $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, т.е. l не е паралелна со Oy оската. Ако $M(x, y)$ е произволна точка од правата l , тогаш од триаголникот BNM имаме:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - n}{x}, \text{ од каде } y = x \operatorname{tg} \alpha + n.$$



црт.1

Ако ставиме $\operatorname{tg} \alpha = k$, ја добиваме равенката

$$y = kx + n \quad (1)$$

Значи, координатите x и y на произволна точка $M(x, y)$ од правата l што ги исполнува условите 1° и 2° задоволуваат равенка од видот (1), и таа претставува равенка на правата l , во која се јавуваат два определувачки параметри k и n .

Бројот $k = \operatorname{tg} \alpha$ го викаме **коэффициент на правецот** на правата l , или **аглен коэффициент** за правата l .

Равенката (1) претставува **експлицитен вид** равенка на права.

Ако $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($l \parallel y$ -оската), коэффициентот $k = \operatorname{tg} \alpha$ не е определен, па во овој случај равенката на правата не може да се претстави во експлицитен вид.

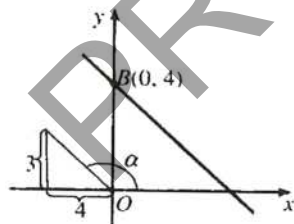
➤ **Пример 1.** Равенката $y = x + 3$ претставува равенка на права со коэффициент на правец $k = 1$, т.е. $\operatorname{tg} \alpha = 1$, од каде следува дека $\alpha = 45^\circ$ е аголот што правата го зафаќа со x -оската, а ја сече y -оската во точката $B(0, 3)$ ■

Во зависност од вредностите на определувачките параметри k и n во равенката $y = kx + n$, добиваме некои специјални прави.

- а) Ако $k = 1$ и $n = 0$, равенката (1) го добива видот $y = x$, а тоа е симетралата на првиот и третиот квадрант.
- б) Ако $k = -1$ и $n = 0$, равенката (1) го добива видот $y = -x$, а таа права е симетралата на вториот и четвртиот квадрант.
- в) Ако $k = 0$ и $n \neq 0$, равенката (1) го добива видот $y = n$, а тоа е права паралелна со x -оската.
- г) Ако $k = 0$ и $n = 0$, равенката (1) поминува во равенка $y = 0$ која претставува равенка на x -оската.

➤ **Пример 2.** Да најдеме равенка на правата која со x -оската зафаќа агол $\alpha = 135^\circ$, а на позицијивниот дел од y -оската одсекува одсечка со должина 3.

Решение. Според условите на задачата имаме: $k = \operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$, $n = 3$, па равенката на правата гласи: $y = -x + 3$ ■



црт.2

➤ **Пример 3.** Да најдеме равенка на права ако $k = -\frac{3}{4}$ и $n = 4$, а постоа со помош на определувачките коэффициенти да ја нацртаме правата во координатен систем.

Решение. Бидејќи k и n се дадени, равенката на правата е $y = -\frac{3}{4}x + 4$. За претставување на правата во координатен систем ги нанесуваме точката $B(0, 4)$ и аголот α кој го конструираме графички според условот $k = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ (црт.2) ■

2. Покажавме дека во правоаголен координатен систем равенката на произволна права е $y = kx + n$, што претставува линеарна равенка по променливите x и y . Природно е сега да си го поставиме прашањето: “Дали секоја линеарна равенка по променливите x и y определува некоја права?”

За да одговориме на ова прашање, да разгледаме една линеарна равенка во општ вид по променливите x и y и да објасниме што претставува множеството точки со координати x и y кои ја задоволуваат таа равенка. Ќе покажеме дека тоа множество точки е права.

Општа линеарна равенка по променливите x и y е равенката

$$Ax + By + C = 0, \quad (2)$$

каде A, B и C се произволни реални броеви, при што A и B не се едновременно еднакви на нула. За различни вредности на коефициентите A, B и C равенката (2) претставува општ вид равенка на права

Навистина, нека $B \neq 0$ и $A \neq 0$. Ако равенката (2) ја решиме по y добиваме $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, од каде ако замениме $-\frac{A}{B} = k$ и $-\frac{C}{B} = n$, ја добиваме равенката

$$y = kx + n \quad (3)$$

што го претставува експлицитниот вид равенка на права.

Ако $C = 0, B \neq 0$, равенката (2) поминува во $Ax + By = 0$

односно $y = -\frac{A}{B}x$ (права што минува низ координатниот почеток) (црт.3).

Ако $B = 0$ и $A \neq 0$ тогаш равенката (2) го добива видот $Ax + C = 0$.

Со решавање на оваа равенка по x добиваме $x = -\frac{C}{A}$ или ако

замениме $-\frac{C}{A} = a$, добиваме

$$x = a \quad (4)$$

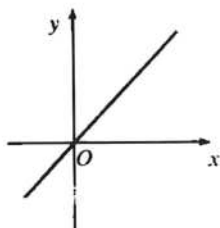
Равенката (4) ја задоволуваат координатите на секоја точка чија апсциса е $x = a$, а тоа се точките од правата што е нормална на x -оската, односно паралелна со y -оската (црт.4). Следува, равенката (4) е равенка на права паралелна со оската Oy .

Ако $A = 0$ и $B \neq 0$, тогаш равенката (2) го добива видот $By + C = 0$, односно $y = -\frac{C}{B}$, или ако замениме $-\frac{C}{B} = n$, ја добиваме равенката

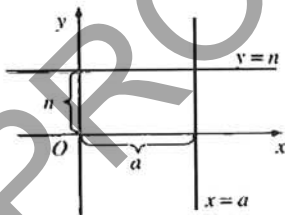
$$y = n \quad (5)$$

Видовме дека равенката (5) е равенка на права паралелна со оската Ox (црт.4)

Разгледај ги за вежба случаите: $A = C = 0$ и $B = C = 0$.



црт.3



црт.4

➤ **Пример 4.** Дадена е правата $p: 3x - 2y - 6 = 0$. Да ги определиме пресечните точки на оваа права со координатните оски.

Решение. Пресечната точка A со x -оската има ордината нула, а пресекот со y -оската е точката B чија апсциса е нула, т.е. $A(x,0)$ и $B(0,y)$. Значи, $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, па е $A(2,0)$ и $-2y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -3$, па е $B(0,-3)$. ■

➤ **Пример 5.** Дадена е правата $l: 3x - 2y + 4 = 0$. Да ја напишеме нејзината равенка во експлицитен вид.

Решение. Равенката на правата $3x - 2y + 4 = 0$ ја решаваме по променливата y , т.е. $3x - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow 2y = 3x + 4 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + 2$, каде $k = \frac{3}{2}$ и $n = 2$. ■

➤ **Пример 6.** Да ја напишеме општиот вид равенка на права што минува низ точката $A(3,1)$, а на y -оската отсекува отсечка со должина $n = 5$.

Решение. Ќе ја запишеме најпрвин бараната права во експлицитен вид $y = kx + n$ т.е. $l: y = kx + 5$. Бидејќи $A \in l$, координатите на A ја задоволуваат равенката на l , па имаме $1 = 3k + 5 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}$. Следува, бараната равенка на правата l е $y = -\frac{4}{3}x + 5$ или во општ вид $4x + 3y - 15 = 0$. ■

ЗАДАЧИ

1. Запиши равенка на права, ако е дадено: а) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $n = 2$; б) $\alpha = 120^\circ$, $n = -3$.
2. Определи го коефициентот на правецот на правата $y = kx$, ако се знае дека точката $M(8,6)$ лежи на правата (т.е. правата минува низ точката M).
3. Определи го аголот што правата а) $y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}}$; б) $y = \frac{2}{5}x + \frac{8}{5}$; в) $y = -3$; г) $x = 5$, го зафаќаат со позитивниот дел на x -оската.
4. Кои од точките $A(2,-1)$, $B(4,2)$ и $C(6,4)$ лежат на правата $y = \frac{3}{2}x - 4$.
5. Определи ги координатите на точките од правата $y = \frac{3}{4}x + 6$ во кои таа ги сече координатните оски.
6. Определи го коефициентот на правецот на правата $y = -\frac{k}{3}x + 2$, која минува низ точката $A(3,0)$.
7. Определи го коефициентот на правецот и отсечката што правата ја отсекува од ординатната оска, ако правите се дадени во општ вид: а) $3x - y + 2 = 0$; б) $x + 5y + 20 = 0$; в) $-2x + \frac{1}{5}y - 7 = 0$.
8. Напиши равенка на права што минува низ пресекот на правите $4x + 3y = 7$ и $3x + 2y = 5$, а коефициентот на правецот е еднаков со коефициентот на правецот на правата $2x + y - 5 = 0$.
9. Напиши равенка на две прави што минуваат низ точката $A(-4,-5)$, така што едната да е паралелна со x -оската, а втората со y -оската.

10. Состави равенка на множество точки што се еднакво оддалечени од координатниот почеток и од точката $A(-5,3)$.

11. Најди го множеството точки еднакво оддалечени од точките $A(-5,3)$ и $B(1,2)$.

12. Во равенката на правата $kx + 3y - 2 = 0$, определи го k така што отсечката на y -оската да биде 4, а потоа определи го аголот што правата го гради со позитивната насока на x -оската.

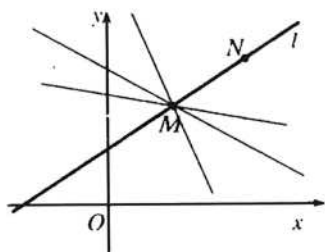
13. Определи го аголот што го зафаќа правата со позитивната насока на x -оската:

а) $2x - y - 3 = 0$;

б) $x + 3y = 12$;

в) $x\sqrt{3} + y = 4$.

4.2.2. РАВЕНКА НА ПРАВА ШТО МИНУВА НИЗ ЕДНА ТОЧКА. РАВЕНКА НА ПРАВА ШТО МИНУВА НИЗ ДВЕ ТОЧКИ.

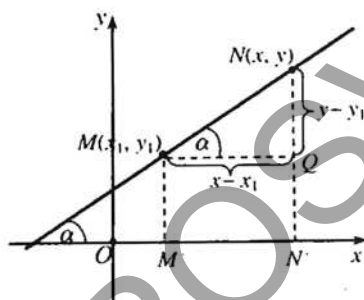


црт.1

1. Од планиметрија ти е познато дека низ една дадена точка $M(x_1, y_1)$ во рамнината минуваат бесконечно многу прави, кои образуваат множество прави (прамен прави), со центар во точката $M(x_1, y_1)$ (црт.1).

Ја поставуваме сега следната задача: да определиме една права од множеството прави низ точката M .

За таа цел доволно е да избереме уште една произволна точка $N(x, y)$ различна од центарот на праменот $M(x_1, y_1)$. Со точките M и N е определена една единствена права од праменот. Да ја определиме нејзината равенка (црт.2).



црт.2

Од правоаголниот триаголник QMN со катети $\overline{MQ} = x - x_1$, $\overline{NQ} = y - y_1$ и агол $\alpha = \angle QMN$ добиваме:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \text{ од каде со замена } \operatorname{tg} \alpha = k \text{ ја добиваме}$$

равенката

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (1)$$

Равенката (1) претставува равенка на произволна права што минува низ точката $M(x_1, y_1)$ а има коефициент на правец еднаков на k . За различни вредности на k добиваме различни прави од праменот, односно сите прави што минуваат низ точката M , освен правата што е паралелна со y -оската. Затоа, равенката (1) можеме да ја земеме за равенка на множеството прави што минуваат низ точката $M(x_1, y_1)$. Ако, покрај точката M е зададена и вредноста на k , тогаш равенката (1) определува единствена права. Тоа е равенка на права што минува низ една точка.

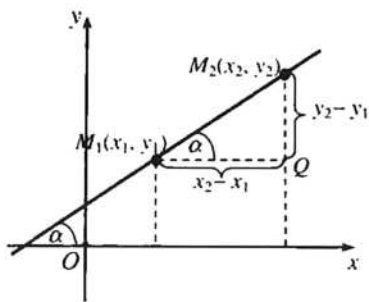
➤ **Пример 1.** Да најдеме равенка на правата што минува низ точката $A(2,3)$ и со позитивната насока на x -оската зафаќа агол $\alpha = 60^\circ$.

Решение. Од условот $\alpha=60^\circ$ наоѓаме $k=\operatorname{tg} 60^\circ=\sqrt{3}$, и со директна примена на формулата (1) добиваме: $y-3=\sqrt{3}(x-2)$ т.е. $\sqrt{3}x-y+3-2\sqrt{3}=0$ ■

➤ **Пример 2.** Како гласи равенката на правата што минува низ точката $M(2,-3)$, а со позитивната насока на x -оската зафаќа ист агол како правата $x+9y-11=0$?

Решение. Коефициентот на правецот на дадената права е $-\frac{1}{9}$. Бидејќи правата што минува низ точката $M(2,-3)$ треба да зафаќа ист агол со x -оската, таа ќе има ист коефициент на правец $k=-\frac{1}{9}$, па согласно со (1) нејзината равенка ќе гласи: $y+3=-\frac{1}{9}(x-2)$ или $x+9y+25=0$ ■

2. Нека во координатната рамнина се дадени две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, при што $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ (црт.3). Со точките M_1 и M_2 е определена единствена права. Да ја составиме нејзината равенка.



црт.1

За таа цел, прво ќе ја запишеме равенката на множеството прави низ една од двете дадени точки, на пример низ $M_1(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (1)$$

Бараната права е онаа права од праменот што минува и низ точката $M_2(x_2, y_2)$, па затоа коефициентот k ќе го определиме така што координатите x_2 и y_2 на точката M_2 да ја задоволуваат равенката на правата (1), т.е.

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1), \text{ од каде } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ако k го замениме во (1) ја добиваме бараната равенка:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (2)$$

Значи, равенката (2) е **равенка на права определена со две точки**. Обиди се, според црт.2, да го определиш k на друг начин.

➤ **Пример 3.** Да најдеме равенка на права што минува низ точките $M_1(-2,1)$ и $M_2(3,3)$.

Решение. Со замена на координатите на точките M_1 и M_2 во (2) добиваме:

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{3 + 2} (x + 2) \text{ т.е. } y - 1 = \frac{2}{5} (x + 2), \text{ или во општ вид } 2x - 5y + 9 = 0. \blacksquare$$

➤ **Пример 4.** Дадени се темињата на триаголникот $A(2,3)$, $B(-4,1)$ и $C(2,-3)$. Да ја најдеме равенката на: а) страната AB б) медијаната BB_1 .

Решение. а) Равенката на страната АВ ќе биде: $y - 3 = \frac{1-3}{-4-2}(x-2)$ т.е. $x - 3y + 7 = 0$.

б) Средишната точка на страната АС е точката $B_1(\frac{2+2}{2}, \frac{3-3}{2})$ т.е. $B_1(2,0)$, па тежишната линија BB_1 ќе биде $y - 0 = \frac{1-0}{-4-2}(x-2)$ т.е. $x + 6y - 2 = 0$. ■

► **Пример 5.** Темињата на триаголникот ABC се $A(-1,-3)$, $B(3,3)$, $C(7,5)$. Да ја најдеме равенката на правата AT каде што T е тежишното на $\triangle ABC$.

Решение. Тежиштето е $T(\frac{-1+3+7}{3}, \frac{-3+3+5}{3})$ т.е. $T(3, \frac{5}{3})$, па правата AT ќе гласи :

$$y - \frac{5}{3} = \frac{-3 - \frac{5}{3}}{-1 - 3}(x - 3) \quad \text{т.е.} \quad 7x - 6y - 11 = 0. \quad \blacksquare$$

► **Пример 6.** Дадени се средишните точки на страните на $\triangle ABC$: $A_1(2,1)$, $B_1(5,3)$ и $C_1(3,-4)$. Да ги определиме равенките на страните на $\triangle ABC$.

Решение. Нека темињата на $\triangle ABC$ имаат координати $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$

Бидејќи A_1 , B_1 , C_1 се средини на страните BC , AC и AB соодветно, имаме:

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 2, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_2}{2} = 3, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = 1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = -4.$$

Одовде, за определување на координатите на темињата, добиваме два система линеарни равенки со 3 непознати:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + x_3 = 10 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = -8 \\ y_1 + y_3 = 6 \\ y_2 + y_3 = 2 \end{cases} \quad \text{чиј решенија се } x_1 = 6, x_2 = 0, x_3 = 4, y_1 = -2, y_2 = -6, y_3 = 8$$

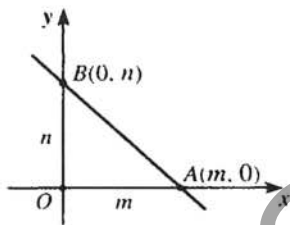
па темињата на $\triangle ABC$ ќе бидат $A(6,-2)$, $B(0,-6)$, $C(4,8)$. Сега можеме да ги составиме равенките на страните според формулата (2) за равенка на права низ две точки (напиши ги сам) ■

ЗАДАЧИ

1. Напиши равенка на права што минува низ дадена точка M , а со позитивната насока на x -оската зафаќа агол α :
а) $M(7,-5)$, $\alpha = 135^\circ$; б) $M(-5,3)$, $\alpha = 45^\circ$; в) $M(3,1)$, $\alpha = 60^\circ$.
2. Како гласи равенката на правата што минува низ точката $M(2,2)$ и со позитивните насоки на координатните оски ограничува триаголник со плоштина 9 кв. ед.?
3. Напиши равенка на права што минува низ точката $M(7,2)$, така што отсечката што правата ја отсекува на позитивниот дел на x -оската, се однесува како 5 : 3 кон ординатата на точката M .

4. Напиши равенка на права чиј коефициент на правецот е 4, а отсечката на x -оската е 5.
5. Како гласи равенка на права што минува низ точките M_1 и M_2 , ако е: а) $M_1(-1,1)$, $M_2(2,4)$; б) $M_1(2,-1)$, $M_2(-2,3)$; в) $M_1(1,0)$, $M_2(4,2)$?
6. Дадени се темињата на триаголник ABC [$A(2,3)$, $B(4,8)$, $C(3,-8)$]. Најди ги равенките на : а) страните; б) тежишните линии (медијаните).
7. Како гласи равенката на права што минува низ заедничката точка на правите $2x+3y-5=0$ и $x-2y-6=0$ и минува низ точката $M(1,2)$.
8. Напиши равенка на права што минува низ точките $M_1(-1,2)$ и $M_2(2,3)$, а потоа определи ги координатите на пресечните точки на добиената права со координатните оски.
9. Познати се трите темиња на паралелограм $A(1,-3)$, $C(-3,5)$, $D(-5,3)$. Напиши равенка на права што минува низ темето B и низ средината на отсечката определена со точките $M(-8,4)$ и $N(10,-16)$.
10. Низ точката $M(4,6)$ повлечи права така што отсечката ограничена меѓу координатните оски е располовена со точката M .
11. Провери дали долунаведените точки лежат на една права: а) $A(2,2)$, $B(5,3)$ и $C(1,0)$; б) $A(1,1)$, $B(2,6)$, $C(-1,-9)$.
12. За кои вредности на параметрите p и q правата со равенка $(p+2q-3)x + (2p-q+1)y + 6p+9=0$ е паралелна со x -оската, а на y -оската отсекува отсечка -3 ?

4.2.3 СЕГМЕНТЕН ВИД РАВЕНКА НА ПРАВА



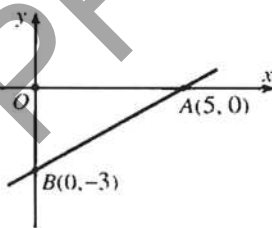
црт.1

Нека дадена права ги пресекува двете координатни оски и не минува низ координатниот почеток (црт.1), и нека пресечните точки со оските Ox и Oy се $A(m, 0)$ и $B(0, n)$ соодветно, при што $m \neq 0$ и $n \neq 0$. Со точките A и B е определена правата AB , чија равенка, според формулата (2) од т.4.2.2, гласи:

$$y - 0 = \frac{n - 0}{0 - m}(x - m) \quad \text{или} \quad y = -\frac{n}{m}(x - m).$$

По средување, добиваме $nx + my = mn$, а по делење со mn добиваме

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \quad (1)$$



црт.2

Равенката на права запишана во видот (1) ја викаме **сегментен вид** равенка на права, бидејќи во неа фигурираат сегментите (отсечоците) m и n што правата ги отсекува на координатните оски.

➤ **Пример 1.** Да составиме равенка на права што минува низ точките $A(5,0)$ и $B(0,-3)$, а потоа да ја конструираме.

Решение. Точките $A(5,0)$ и $B(0,-3)$ се точки од координатните оски и притоа $m = 5$, $n = -3$. Со директна замена во формулата (1) ја добиваме равенката $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$, што е равенка на правата низ точките A и B во сегментен вид.

Конструкцијата на правата е очигледна (црт. 2). ■

Равенката на правата во општ вид $Ax + By + C = 0$ каде $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$, можеме секогаш да ја сведеме во сегментен вид со следниве трансформации:

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow Ax + By = -C \Leftrightarrow \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1, \text{ од каде } m = -\frac{C}{A}, n = -\frac{C}{B},$$

и обратно, сегментниот вид на равенката на правата (1) да го трансформираме во општ вид.

➤ **Пример 2.** Дадена е правата $2x - 3y + 5 = 0$. Да ја трансформираме равенката на правата во сегментен вид и да ги определиме сегментните (ојсечоциите) на координатните оски.

Решение. Имаме : $2x - 3y + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y = -5 \Leftrightarrow \frac{2x}{-5} - \frac{3y}{-5} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{y}{5} = 1.$

Значи $m = -\frac{5}{2}$, $n = \frac{5}{3}$ ■

➤ **Пример 3.** Да ја сведеме во сегментен вид равенката на правата $y = \frac{2}{3}x + 2$.

Решение. Имаме $y = \frac{2}{3}x + 2 \Leftrightarrow 3y = 2x + 6 \Leftrightarrow 2x - 3y = -6$, од каде $\frac{x}{-\frac{6}{2}} + \frac{y}{\frac{6}{3}} = 1$ ■

➤ **Пример 4.** Во равенката на правата $mx + (m + 1)y - 8 = 0$, да го определиме параметарот m , така што ојсечоците на x -оската да биде двапати поголем од ојсечоците на y -оската.

Решение. Да ја запишеме равенката на дадената права во сегментен вид:

$$mx + (m + 1)y - 8 = 0 \Leftrightarrow mx + (m + 1)y = 8 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{8}{m}} + \frac{y}{\frac{8}{m+1}} = 1. \text{ Согласно со условот на задачата}$$

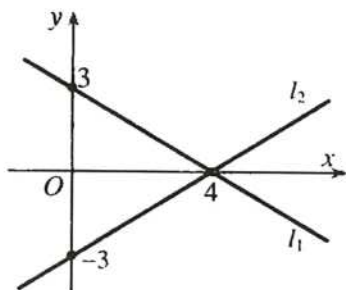
добиваме $\frac{8}{m} = 2 \frac{8}{m+1} \Leftrightarrow m + 1 = 2m$, од каде $m = 1$, па равенката на правата во сегментен вид

ќе биде $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$ ■

➤ **Пример 5.** Во равенката на правата $3x + ky - 12 = 0$, да го определиме k така што должината на ојсечката што правата ја ојсекува меѓу координатните оски е 5, а потоа да ја запишеме равенката на правата.

Решение. Најнапред равенката на правата ја доведуваме до сегментен вид:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{\frac{12}{k}} = 1 \quad (*)$$



црт.3

Одовде следува дека пресечните точки на дадената права со координатните оски се $A(4,0)$ и $B(0, \frac{12}{k})$. Согласно со условот на задачата имаме $\overline{AB} = 5$, т.е.

$$\sqrt{(0-4)^2 + (\frac{12}{k}-0)^2} = 5 \Leftrightarrow 16 + \frac{144}{k^2} = 25,$$

од каде наоѓаме: $k = \pm 4$. Значи, постојат две прави (l_1) и (l_2) што го исполнуваат дадениот услов (црт.3). Од (*) наоѓаме:

$$l_1: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \text{ и } l_2: \frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1 \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

1. Напиши ги равенките на правите во општ вид кои на координатните оски отсекуваат отсечки: а) $m = 3$, $n = 2$; б) $m = -4$, $n = 3$; в) $m = 6$, $n = \frac{5}{2}$; г) $m = -2$, $n = 3$.
2. Дадени се равенките на правите во општ вид. Напиши ги во сегментен вид следниве равенки на прави:
а) $3x - 2y - 2 = 0$; б) $x - 3y + 6 = 0$; в) $3x + 4y - 10 = 0$.
3. Дадени се равенки на прави во сегментен вид:
а) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$; б) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-4} = 1$; в) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$; Определи ги коефициентите на правецот на тие прави.
4. Во равенката на правата $ax + 4y - 8 = 0$, определи го a така што отсечокот на x -оската да биде:
а) 4; б) -6.
5. Во равенката на правата $2x + 5\lambda y - 3 = 0$, определи го λ така што отсечките на координатните оски да бидат еднакви.
6. Во равенката на правата $3ax + 4y - 5 = 0$, определи го a , така што збирот на отсечките на координатните оски да биде 5.
7. Во равенката на правата $3ax - 4y + 15 = 0$, определи го a , така што разликата на отсечките на координатните оски да биде 10.
8. Напиши равенка на права која минува низ точката $M(6,0)$ и со координатните оски ограничува триаголник со плоштина 30 кв. ед. (квадратни единици).
9. Како гласи равенката на права што минува низ точката $S(2,-1)$ и отсекува еднакви отсечоци на координатните оски?
- 10*. Напиши ги равенките на страните на ромб, чии дијагонали со должина 16 и 18 лежат на координатните оски.
11. Пресметај ја плоштината на триаголникот ограничен со координатните оски и правата $3x + 4y - 12 = 0$.

4.2.4 ПРЕСЕК НА ДВЕ ПРАВИ. АГОЛ МЕЃУ ДВЕ ПРАВИ

1. Нека се дадени две прави со нивните равенки во општ вид:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

за кои претпоставуваме дека се сечат, т.е. имаат една заедничка точка $M(x_0, y_0)$ (**пресечна точка**). Ја поставуваме задачата: да ги определиме координатите на пресечната точка на правите (1).

Бидејќи пресечната точка $M(x_0, y_0)$ лежи на двете прави, нејзините координати x_0 и y_0 ги задоволуваат двете равенки (1). Но важи и обратно, т.е. ако (x_0, y_0) е решение на системот (1), тогаш точката $M(x_0, y_0)$ лежи на секоја од правите (1).

Според тоа, координатите на пресекот на две прави го претставуваат решението на системот (1), што го образуваат равенките на дадените прави.

Со решавање на системот равенки (1), со една од познатите методи, доаѓаме до решението:

$$x = \frac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B}; \quad y = \frac{A_1C - AC_1}{AB_1 - A_1B} \quad (2)$$

Веќе ти е познато дека, во зависност од коефициентите на системот (1) можни се следниве три случаи:

а) Ако $AB_1 - A_1B \neq 0$ т.е. $\frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1}$, системот (1) има едно решение, т.е. правите (1) **се сечат во една точка**. Координатите на пресечната точка се дадени со равенствата (2).

б) Ако $AB_1 - A_1B = 0$ т.е. $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$, а $BC_1 - B_1C \neq 0$ и $A_1C - AC_1 \neq 0$ или $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1}$, системот (1) нема решение, а тоа значи дека правите не се сечат, односно, **тие се паралелни**.

в) Ако $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$, системот (1) е неопределен, т.е. има бесконечно множество решенија.

Тоа, пак, значи дека сите точки од правите (1) се заеднички, односно **правите се совпаѓаат**.

➤ **Пример 1.** Дадени се правите $5x - y + 1 = 0$ и $2x + y - 8 = 0$. Да провериме дали правите се сечат, а во потврден случај да ја определиме пресечната точка.

Решение. Од равенките на правите $5x - y + 1 = 0$ и $2x + y - 8 = 0$, каде $A = 5$, $B = -1$, $C = 1$ и $A_1 = 2$, $B_1 = 1$, $C_1 = -8$ следува $\frac{5}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-8}$, што значи дека двете прави се сечат, а пресечната точка е $M(1, 6)$ (провери!). ■

➤ **Пример 2.** Да провериме дали правите $3x - y + 5 = 0$ и $3x - y - 7 = 0$ се паралелни. Зошто?

► **Пример 3.** Правите $2x - 3y + 1 = 0$ и $10x - 15y + 5 = 0$ се совпаѓаат. Зошто?

► **Пример 4.** Да ја најдеме равенката на права што минува низ пресекој на правите:

$2x + 3y - 5 = 0$ и $3x + 4y - 7 = 0$, а коефициентот на правецот на бараната права е 3.

Решение. Решаваме систем од равенки на дадените прави:
$$\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$$

и притоа добиваме дека пресечна точка е $M(1,1)$, а потоа треба да запишеме равенка на права низ точката $M(1,1)$, со коефициент на правец $k = 3$. Имаме:

$$y - 1 = 3(x - 1) \text{ т.е. } 3x - y - 2 = 0 \blacksquare$$

2. Честопати во твоето изучување на математиката се среќаваше со поимот агол меѓу две прави од дадена рамнина, но досега не научи како да го одредиш. Тоа ќе ти го овозможи аналитичката геометрија.

Нека се дадени две прави во експлицитен вид

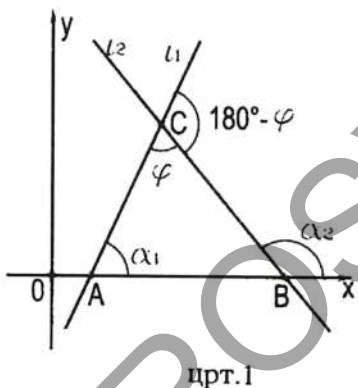
$$l_1: y = k_1x + n_1 \quad \text{и} \quad l_2: y = k_2x + n_2$$

што се сечат и ни една не е паралелна со y -оската. Под агол меѓу правите l_1 и l_2 ќе го подразбираме остриот агол φ (другиот е $180^\circ - \varphi$) (црт.1). Нека α_1 и α_2 се аглите кои правите l_1 и l_2 ги зафаќаат со позитивната насока на x -оската соодветно. Од триаголникот ABC на црт.1 следува: $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$, односно $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, од каде

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2} \quad (1)$$

Но $\operatorname{tg} \alpha_1$ и $\operatorname{tg} \alpha_2$ се коефициенти на правец на правите l_1 и l_2 соодветно, па ако ставиме $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, тогаш од равенството (1) ја добиваме формулата за агол меѓу две прави

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (2)$$



Со примена на формулата (2) во конкретни случаи, може да добиеме $\operatorname{tg} \varphi > 0$ или $\operatorname{tg} \varphi < 0$. Во првиот случај е определен остриот агол, а во вториот тапиот агол меѓу дадените прави.

► **Пример 5.** Да го определиме аголот меѓу правите $y = 2x - 3$ и $3x + y - 2 = 0$.

Решение. Коефициентот на правец за првата права е $k_1 = 2$, а за втората, откако претходно ќе ја запишеме во експлицитен вид $y = -3x + 2$, $k_2 = -3$. Сега со примена на формулата (2), добиваме $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-3 - 2}{1 + 2(-3)} = 1$, од каде $\varphi = 45^\circ$. ■

► **Пример 6.** Да го определиме аголот меѓу правите $3x - 5y + 2 = 0$ и $4x + 5y - 5 = 0$.

Решение. Коефициентите на правец на двете прави се $k_1 = \frac{3}{5}$ и $k_2 = -\frac{4}{5}$ соодветно.

Тогаш, од (2) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{-4}{5} - \frac{3}{5}}{1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}} = -\frac{35}{13}$, од каде добиваме $\varphi = \arctg(-\frac{35}{13})$, т.е. $\varphi \approx 110^\circ 22'$, а

$\varphi_1 \approx 69^\circ 37'$. ■

► **Пример 7.** Осириниот агол меѓу две прави е 45° . Ако еднајта од нив е $2x - 3y + 4 = 0$, да ја определиме равенката на другата права, која на y -оската отсекува отсечка 7 единици.

Решение. Коефициентот на правец на дадената права е $k_1 = \frac{2}{3}$. Според условите на задачата другата права е $y = k_2 x + 7$. Од формулата за агол меѓу две прави (2), добиваме:

$\operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{k_2 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3} k_2} \right|$, од каде $k_2 = 5$. Следува, равенката на бараната права ќе биде $y = 5x + 7$ т.е.

$5x - y + 7 = 0$ или $x + 5y - 7 = 0$ (зошто?) ■

ЗАДАЧИ

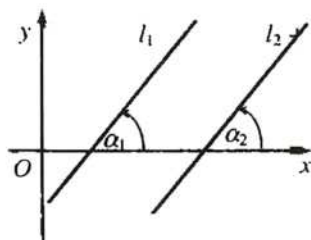
- Опреди ја пресечната точка на правите:
 - $2x - 3y + 1 = 0$ и $3x - 2y - 1 = 0$;
 - $3x + 2y - 4 = 0$ и $6x + 4y - 17 = 0$;
 - $2x + y - 4 = 0$ и $x - 2y + 3 = 0$;
- Напиши равенка на права што минува низ пресекот на правите $4x + 3y - 7 = 0$ и $3x + 2y - 5 = 0$, а коефициентот на правецот е еднаков со коефициентот на правецот на правата $2x + y = 5$.
- Равенките на страните на еден паралелограм се:

$$y - 3x + 9 = 0, 5x + 3y - 18 = 0, y - 3x - 1 = 0 \text{ и } 5x + 3y - 2 = 0.$$
 Најди ги равенките на дијагоналите на паралелограмот.
- Опреди го m така што правите $mx - 3y - 2n = 0$ и $3x - my - m + 1 = 0$ да бидат паралелни.
- Опреди го m така што правите $(m - 2)x + my - 2 = 0$ и $6x + (m + 8)y - m - 2 = 0$ се совпаѓаат.
- Опреди го m така што пресекот на правите $(m + 2)x + (1 + 5m)y - 15 = 0$ и $(5 - 2m)x + (1 - 10m)y - 9 = 0$, е точка која лежи на правата $x + y + 6 = 0$.
- Опреди го аголот меѓу правите $2x + y - 1 = 0$ и $3x - y + 2 = 0$.
- Најди го аголот меѓу правите $x - 2y + 3 = 0$ и $x - 3 = 0$.
- Колкав агол зафаќаат правите $x + 2 = 0$ и $y - 3 = 0$?
- Опреди го аголот меѓу правите $x\sqrt{3} + y\sqrt{2} - 2 = 0$ и $x\sqrt{6} - 6y + 3 = 0$.
- Опреди ги внатрешните агли на триаголник, ако се дадени равенките на неговите страни $18x + 16y - 17 = 0$, $14x - 7y + 15 = 0$ и $5x + 10y - 9 = 0$.
- Напиши равенка на права што минува низ точката $M(2, -1)$, а со правата $5x - 2y + 3 = 0$ зафаќа агол од 45° .

4.2.5. УСЛОВ ЗА ПАРАЛЕЛНОСТ И НОРМАЛНОСТ НА ПРАВИ

1. Во претходната точка видовме кој услов треба да го исполнуваат коефициентите во равенките на две паралелни прави зададени со нивните равенки во општ вид.

Сега ќе видиме како условите за паралелност и нормалност на две прави можеме да ги добиеме поаѓајќи од некои други определувачки параметри за правите.



црт.1

Ако правите l_1 и l_2 се паралелни, тогаш аглите што тие ги зафаќаат со позитивната насока на x -оската се еднакви, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2$ (црт.1), но тогаш и $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, односно

$$k_1 = k_2 \quad (1)$$

Важи и обратно: ако $k_1 = k_2$ тогаш $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, од каде имаме $\alpha_1 = \alpha_2$ или $\alpha_1 = \alpha_2 + 180^\circ$, а оттука следува дека правите се паралелни.

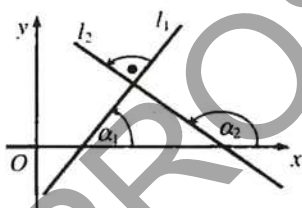
Значи, две прави се **паралелни** ако и само ако **двете прави имаат исти коефициенти на правец**.

Дали е можно до истиот услов за паралелност да дојдеме и на друг начин. Одговорот на тоа прашање ќе го илустрираме со неколку примери.

► **Пример 1.** Да провериме дали **правите** $2x - 3y + 1 = 0$ и $4x - 6y - 5 = 0$ се **паралелни**.

Решение. Коефициентите на правецот за дадените прави се $k_1 = \frac{2}{3}$ и $k_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, т.е. $k_1 = k_2$, па следува дека правите се паралелни. ■

До истиот резултат ќе дојдеме и ако ја примениме формулата за агол меѓу две прави. Имаме: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0$ од каде наоѓаме $\varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 180^\circ$, од каде пак следува дека правите се паралелни



црт.2

2. Ако правите l_1 и l_2 се нормални една на друга, тогаш $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$ (црт.2), од каде следува

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha_1) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}, \text{ т.е.}$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

или

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

(2)

Важи и обратно, ако $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, тогаш $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha_1)$, од каде следува $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$, т.е. правите l_1 и l_2 заемно се нормални.

Значи, две прави **заемно се нормални** ако **коефициентите на правецот им се заемно реципрочни и со спротивен знак**.

➤ **Пример 2.** За која вредност на k правата $y = kx + 1$ е нормална на правата $y = 2x - 1$?

Решение. Коефициентот на правецот на втората права е 2, па користејќи го условот за нормалност меѓу две прави, добиваме $2k = -1$, од каде $k = -\frac{1}{2}$, па равенката на првата права ќе биде $y = -\frac{1}{2}x + 1$ односно $x + 2y - 2 = 0$ ■

➤ **Пример 3.** Да најдеме равенка на права која на y -оската отсекува отсечок од 3 единици и е нормална на правата $5x - 4y - 13 = 0$.

Решение. Нека равенката на бараната права е $y = kx + 3$, при што треба да се определи коефициентот k од условот за нормалност со другата права. За дадената права $5x - 4y - 13 = 0$ имаме $k_1 = \frac{5}{4}$, затоа коефициентот на правецот на бараната права ќе биде $k = -\frac{4}{5}$, а равенката на бараната права ќе биде $y = -\frac{4}{5}x + 3$, односно $4x + 5y - 15 = 0$ ■

➤ **Пример 4.** Да најдеме равенка на права што минува низ точката $M(1,3)$ и е паралелна со правата $x - y + 3 = 0$.

Решение. Равенката на правата што минува низ точката $M(1,3)$ ќе биде $y - 3 = k(x - 1)$. Но, таа е паралелна на правата $x - y + 3 = 0$ т.е. $y = x + 3$ чиј коефициент на правец е $k_1 = 1$. Затоа бараната равенка на права ќе биде $y - 3 = 1(x - 1)$ односно $x - y + 2 = 0$ ■

➤ **Пример 5.** Да определиме равенка на права што минува низ точката $M(-2,3)$ и е нормална на правата $2x - 3y + 6 = 0$.

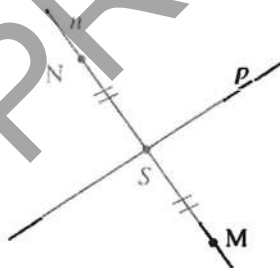
Решение. Бараната равенка на права ќе биде: $y - 3 = k(x + 2)$. Но, таа е нормална на правата со коефициент $k_1 = \frac{2}{3}$, па оттука $k_1 \cdot \frac{2}{3} = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$. Затоа бараната равенка на правата ќе биде $y - 3 = -\frac{3}{2}(x + 2)$ или $3x + 2y = 0$ ■

➤ **Пример 6.** Да ја најдеме равенката на висината AD на триаголникот ABC чиј темиња се во точките $A(2,6)$, $B(-3,1)$ и $C(6,0)$.

Решение. Правата BC има коефициент на правец $k = \frac{1-0}{-3-6} = -\frac{1}{9}$. Бидејќи висината AD е нормална на страната BC коефициентот на правецот на правата што ја содржи висината AD ќе биде $k_1 = 9$, па равенката на висината AD е $y - 6 = 9(x - 2)$, односно $9x - y - 12 = 0$ ■

➤ **Пример 7.** Да ја определиме точката M , која е симетрична со точката $N(3,9)$ во однос на правата $p: y = 2x - 2$.

Решение. Постапката за наоѓање на симетричната точка $M(x,y)$ е следнава: низ точката N повлекуваме права (n) нормална на правата (p) , ја наоѓаме пресечната точка $S = (p) \cap (n)$, а потоа ја наоѓаме и точката M од условот



црт.3

точката S да е средина за отсечката MN (црт.3). Значи имаме: $n: y - 9 = -\frac{1}{2}(x - 3)$, односно

$x + 2y = 21$, па од системот равенки $\begin{cases} x + 2y = 21 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ наоѓаме $S(5,8)$. За определување на

координатите на точката M , од условот S е средина на отсечката MN , ги имаме равенките:

$$5 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow x = 7 \text{ и } 8 = \frac{9+y}{2} \Leftrightarrow y = 7, \text{ од каде е } M(7,7) \blacksquare$$

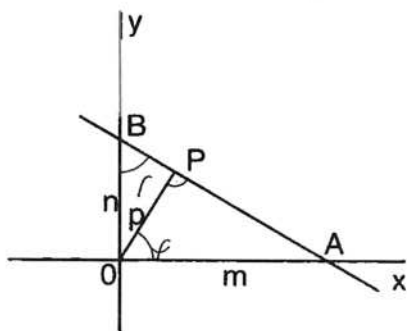
ЗАДАЧИ

1. Кои од наведените прави се меѓусебно паралелни, а кои меѓусебно нормални:
а) $y = -x + 4$; б) $y = 2x - 1$; в) $y = x - 7$; г) $y = 2x - 3$; д) $y = -0.5x + 8$?
2. За кои вредности на A , B и C правата $Ax + By + C = 0$ е паралелна со правата $2x - y + 3 = 0$ и на ординатната оска отсекува отсечка со должина од 5 единици?
3. Определи ја подножната точка на нормалата повлечена од точката $A(5,9)$ до правата $4x - 7y + 21 = 0$.
4. Определи го m , така што правите $8mx + 3y - 4 = 0$ и $12x + 4my + 6 = 0$, да бидат меѓусебно нормални.
5. Како гласи равенката на права што минува низ координатниот почеток и е нормална на правата $3x - y - 2 = 0$?
6. Темињата на еден триаголник се $A(-2,2)$, $B(3,5)$ и $C(6,-3)$. Напиши ја равенката на висината повлечена од темето A .
7. Триаголник ABC е зададен со темињата $A(-4,-2)$, $B(2,7)$ и $C(8,4)$. Напиши равенка на права што минува низ тежиштето и е нормална на страната AC .
- 8*. На правата $x + y - 4 = 0$ определи точка од која отсечката чии крајни точки се $A(3,3)$ и $B(0,2)$ се гледа под агол од 45° .
9. Определи ги параметрите m и n , за кои правите $mx + 8y + n = 0$ и $2x + my - 1 = 0$ ќе бидат:
а) паралелни; б) нормални.
10. Определи равенка на права што минува низ пресекот на правите $3x - y - 1 = 0$ и $2x + 3y - 8 = 0$ и е нормална на правите: а) $x - 2y + 3 = 0$; б) $5x + 6y + 8 = 0$.
11. Правите $5x + my - 5m = 0$ и $x + 3y + 10 = 0$ се сечат под агол од 45° . Определи го параметарот m , а потоа низ пресечната точка напиши равенка на права нормална на првата права.
12. На правата $3x + 2y - 5 = 0$, најди точка еднакво оддалечена од точките $A(-1,-1)$ и $B(3,3)$.

4.2.6. НОРМАЛЕН ВИД РАВЕНКА НА ПРАВА

Нека l е права во произволна положба во однос на координатниот систем во рамнината чија положба е определена со растојанието p од координатниот почеток до правата и со аголот φ што нормалата p го зафаќа со позитивната насока на x -оската (црт.1). Значи, определувачки параметри овде се p и φ . Нека равенката на правата l е дадена во сегментен вид:

$$l: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \quad (1)$$



црт.1

Од $\triangle OPA$ следува дека $\cos \varphi = \frac{p}{m}$ или $m = \frac{p}{\cos \varphi}$,

а од $\triangle OPB$ следува дека $\sin \varphi = \frac{p}{n}$ или $n = \frac{p}{\sin \varphi}$.

Ако овие вредности за m и n ги замениме во равенката (1),

добиваме: $\frac{\cos \varphi}{p}x + \frac{\sin \varphi}{p}y = 1$ односно

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0 \quad (2)$$

Равенката (2) претставува **нормален** (Хесеов) **вид** равенка на права. Во неа се јавуваат двата определувачки параметри: p и φ . Притоа, параметарот p што ја претставува должината на нормалата од координатниот почеток до правата l прима секогаш позитивни вредности, а аголот φ се менува од 0° до 360° .

➤ **Пример 1.** Да ја составиме равенката на правата во нормален вид ако нормалата p , повлечена од координатниот почеток O до правата, зафаќа со x -оската агол $\varphi = 240^\circ$, а растојанието од O до правата е $p = 5$.

Решение. Бидејќи се дадени определувачките параметри, со директна замена во равенката (2) добиваме по ред:

$x \cos 240^\circ + y \sin 240^\circ - 5 = 0$ т.е. $x \cos(180^\circ + 60^\circ) + y \sin(180^\circ + 60^\circ) - 5 = 0$, од каде добиваме $x(-\cos 60^\circ) + y(-\sin 60^\circ) - 5 = 0$ т.е. $x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ + 5 = 0$ и конечно бараната

права е $-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 5 = 0$ односно $x + \sqrt{3}y + 10 = 0$ ■

Веќе видовме како различните видови равенки на дадена права, општ вид, експлицитен, сегментен, се трансформираат еден во друг. Овде го поставуваме истото прашање: како за дадена права l равенката од општиот вид да ја трансформираме (доведеме) во нормален вид? Да се обидеме да одговориме на ова прашање.

Нека се дадени општиот и нормалниот вид равенка на права:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

Бидејќи двете равенки треба да претставуваат иста права, тогаш нивните коефициенти на правец мораат да бидат пропорционални (види 4.2.4), т.е. треба да важи

$$\frac{\cos \varphi}{A} = \frac{\sin \varphi}{B} = \frac{-p}{C} = \lambda \quad (3)$$

каде λ е коефициент на пропорционалност, што треба да го определиме. Од равенството (3) имаме

$$\cos \varphi = \lambda A, \quad \sin \varphi = \lambda B, \quad -p = \lambda C \quad (4)$$

Ако првите две равенства прво ги квадрираме а потоа ги собереме, добиваме:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \lambda^2 (A^2 + B^2) \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{A^2 + B^2} \quad \text{т.е.} \quad \lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

Со замена на λ во равенствата (4), добиваме:

$$\cos \varphi = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \sin \varphi = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, p = \frac{-C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (5)$$

Ако овие изрази за $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ и p ги замениме во нормалниот вид на равенка на правата (2), ја добиваме равенката:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (6)$$

што е исто така равенка на права во нормален вид.

Треба уште да одговориме на прашањето: *кој од двајта знака пред коренови да го земеме предвид?* Одговорот веќе го имаме. Тој се определува од третото равенство од равенствата (5). Како што веќе кажавме, параметарот p е секогаш позитивен па јасно е дека *знакот пред коренови мора да биде сиријивен на знакот на коефициентот C .*

➤ **Пример 2.** Да ја сведеме во нормален вид равенката на правата, дадена во омиш вид: $3x + 5y - 6 = 0$.

Решение. Според формулата (6) имаме: $\frac{3x + 5y - 6}{\sqrt{9 + 25}} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x + 5y - 6}{\sqrt{34}} = 0$ или $\frac{3}{\sqrt{34}}x + \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{6}{\sqrt{34}} = 0$, од каде наоѓаме

$$\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}, \sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{34}} \text{ и } p = \frac{6}{\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{34}}{34} = \frac{3\sqrt{34}}{17}.$$

➤ **Пример 3.** Да го најдеме аголот што нормалата повлечена од координатниот почеток до правата (1): $x - y + 1 = 0$, го зафаќа со позитивната насока на x -оската и должината на нормалата p .

Решение. Ја сведуваме равенката на правата во нормален вид: $\frac{x - y + 1}{-\sqrt{2}} = 0$, односно $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$. Од последната равенка имаме: $\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, од каде наоѓаме $\varphi = 135^\circ$, а $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

➤ **Пример 4.** Дадена е равенката на права во експлицитен вид $y = kx + n$. Да ја сведеме во нормален вид.

Решение. Од $y = kx + n \Leftrightarrow kx - y + n = 0$ имаме $\frac{kx - y + n}{\pm \sqrt{k^2 + 1}} = 0$, а тоа е равенката на правата во нормален вид ■

➤ **Пример 5.** Дали правата дадена со равенката $\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 2 = 0$ е во нормален вид?

Решение. Ако дадената равенка на правата е во нормален вид, тогаш би имале

$$\cos \varphi = \frac{12}{13}, \quad \sin \varphi = \frac{5}{13}, \quad \text{па мора да важи: } \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1. \quad \text{Бидејќи } \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

дадената равенка е во нормален вид ■

ЗАДАЧИ

1. Напиши равенка на права, чие растојание до координатниот почеток е p а аголот меѓу нормалата p и x -оската е φ , ако: а) $p=5, \varphi=45^\circ$; б) $p=12, \varphi=210^\circ$; в) $p=10, \varphi=330^\circ$
2. Напиши ги во нормален вид дадените прави:
 - а) $3x - 4y + 7 = 0$; б) $5x + 12y - 26 = 0$; в) $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.
3. Провери дали правата $2x - 3y + 1 = 0$ е запишана во нормален вид?
4. Напиши ги во нормален вид правите: а) $2x - 3 = 0$; б) $4y + 5 = 0$.
5. Напиши ги во нормален вид правите: а) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$; б) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{7} = 1$; в) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$.
6. Напиши ги во нормален вид правите: а) $5x - 12y = 0$; б) $8x + 15y = 0$.
7. Пресметај ја должината на нормалата повлечена од координатниот почеток до правата:
 - а) $l: x + y - \sqrt{2} = 0$; б) $l_1: 3x - 4y + 55 = 0$.

4.2.7. РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО ПРАВА

Нека се дадени права l и точка M_1 надвор од правата l . Познато ти е дека, ако M е подножјето на нормалата повлечена од точката M_1 до правата l , тогаш растојанието d од точката до правата е еднакво на должината на отсечката M_1M , т.е. $d = \overline{M_1M}$.

Ползувајќи го нормалниот вид на равенката на правата, ќе изведеме формула според која можеме едноставно да го определуваме растојанието d , иако истото тоа растојание можеме да го определиме и на друг начин, користејќи некои други признаења.

Нека правата l е дадена со равенка во нормален вид: $l: x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$ и $M_1(x_1, y_1)$ е точка надвор од правата l . Ако претпоставиме дека правата l не минува низ координатниот почеток, можни се следниве два случаи за: точката $M_1(x_1, y_1)$ и координатниот почеток се на иста страна на правата l (црт.1) или се од различна страна на правата l (црт.2) Ќе го разгледаме првиот случај (црт.1). Низ $M_1(x_1, y_1)$ повлекуваме права l_1 паралелна со дадената права l . Тогаш, растојанието од координатниот почеток O до правата l_1 е $\overline{ON} = p - d$, па можеме да ја запишеме равенката на правата l_1 во нормален вид:

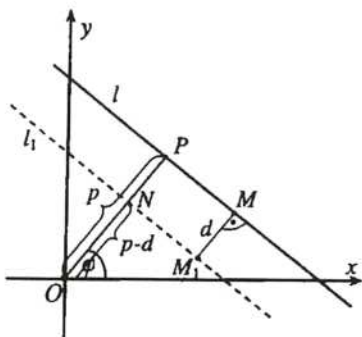
$$l_1: x \cos \varphi + y \sin \varphi - (p - d) = 0$$

Бидејќи $M_1 \in l_1$, нејзините координати x_1 и y_1 ја задоволуваат равенката на (l_1), па имаме

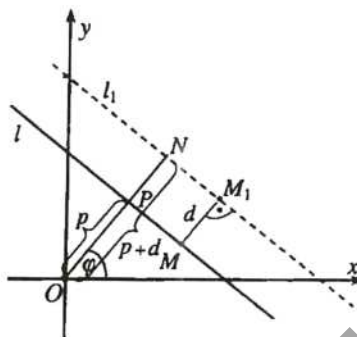
$$x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - (p - d) = 0,$$

од каде го наоѓаме:

$$d = -(x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p) \quad (1)$$



црт.1



црт.2

Во вториот случај, кога координатниот почеток и точката $M_1(x_1, y_1)$ се од различна страна на правата l , на аналоген начин добиваме (докажи!):

$$d = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p \quad (2)$$

Бидејќи бројот $x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p$ може да биде позитивен (ако O и M_1 се на иста страна од правата l), но и негативен (ако O и M_1 се на различни страни од правата l), а растојанието е секогаш позитивен број, (1) и (2) ги запишуваме со формулата:

$$d = |x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p| \quad (3)$$

Ако равенката на правата l е дадена во општ облик
 $Ax + By + C = 0$,

тогаш (види во претходната точка):

$$x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

па за растојанието d од точката $M_1(x_1, y_1)$ до правата l ја имаме формулата:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \right| \quad (4)$$

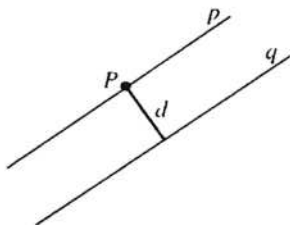
► **Пример 1.** Да го најдеме растојанието од точката $M(-5, 7)$ до правата $3x - 4y + 18 = 0$.

Решение. Согласно со формулата (4) добиваме $d = \left| \frac{3 \cdot (-5) - 4 \cdot 7 + 18}{-\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{-25}{-5} \right| = 5$ ■

► **Пример 2.** Да го определиме растојанието од точката $A(12, 15)$ до правата $y = x$.

Решение. Равенката на дадената права ја запишуваме во општ вид $x - y = 0$, од каде добиваме $d = \frac{|12 - 15|}{\sqrt{1 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ■

➤ **Пример 3.** Да го определиме растојанието меѓу паралелните прави $p: 12x - 5y + 48 = 0$ и $q: 12x - 5y + 217 = 0$.



црт.3

Решение. Растојанието d меѓу две паралелни прави е еднакво на растојанието од една произволна точка од едната до другата права (црт.3). За таа цел, на една од дадените прави, на пример на (p) , избираме произволна точка P и го наоѓаме растојанието на оваа точка до другата права (q) . На пример, на правата (p) припаѓа точката $P(-4, 0)$. Координатите на оваа точка ги определуваме така што едната координата ја избираме произволно, на пример $y = 0$, а потоа другата координата x ја определуваме од условот координатите $(x, 0)$ да ја задоволуваат равенката на правата (p) , т. е.

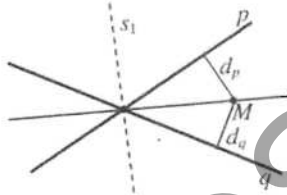
$$12x - 5 \cdot 0 + 48 = 0, \text{ од каде добиваме } x = -4.$$

Сега го наоѓаме растојанието d на точката P до правата q , кое согласно со формулата (4) е

$$d = \frac{|12 \cdot (-4) - 5 \cdot 0 + 217|}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{|169|}{13} = 13$$

а тоа е и растојанието меѓу двете прави. ■

➤ **Пример 4.** Да ја определиме равенката на симетралата (s) на аголот меѓу правите $p: 3x + 4y - 15 = 0$ и $q: 5x - 12y + 26 = 0$



црт.4

Решение. Согласно со дефиницијата за симетрала на агол, за произволна точка $M(x, y)$ што лежи на симетралата s растојанијата до двете прави p и q соодветно, се еднакви, т. е.

$$d_p = d_q \text{ (црт.4). Бидејќи } d_p = \left| \frac{3x + 4y - 15}{5} \right|, \quad d_q = \left| \frac{5x - 12y + 26}{-13} \right|,$$

имаме

$$\frac{3x + 4y - 15}{5} = \left| \frac{5x - 12y + 26}{-13} \right|.$$

односно

$$39x + 52y - 195 = \pm(-25x + 60y - 130),$$

од каде равенките на симетралите запишани во општ вид се:

$$s_1: 64x - 8y - 65 = 0 \quad \text{и} \quad s_2: 14x + 112y - 325 = 0.$$

Бидејќи двете прави зафаќаат два пара вкрстени агли, следува дека симетралите s_1 и s_2 се меѓусебно нормални ■

➤ **Пример 5.** Да ги пресметаме висините на триаголникот ABC чији темиња се $A(-2, 5)$, $B(6, -3)$ и $C(1, 9)$.

Решение. Најнапред да ги најдеме равенките на страните на триаголникот, а потоа растојанијата од темињата на триаголникот до спротивните страни. Имаме:

$$AB: y+3 = \frac{5+3}{-2-6}(x-6) \text{ т.е. } x+y-3=0; \quad AC: y-9 = \frac{5-9}{-2-1}(x-1) \text{ т.е. } 4x-3y+23=0$$

$$BC: y+3 = \frac{9+3}{1-6}(x-6) \text{ т.е. } 12x+5y-57=0$$

Сега, согласно со формулата за растојание од точка до права, ги наоѓаме должините на соодветните висини:

$$h_a = \left| \frac{12 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 - 57}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \right| = \frac{56}{13}, \quad h_b = \left| \frac{4 \cdot 6 - 3 \cdot (-3) + 23}{-\sqrt{4^2 + 3^2}} \right| = \frac{56}{5}, \quad h_c = \left| \frac{1+9-3}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

ЗАДАЧИ

- Пресметај го растојанието од дадена точка А до дадена права ако:
 - а) $A(8,1)$, $5x-12y-2=0$; б) $A(1,3)$, $8x+15y-2=0$; в) $A(0,6)$, $9x+12y+3=0$.
- Опреди го растојанието d меѓу паралелните прави:
 - а) $4x-3y-8=0$ и $4x-3y+7=0$; б) $9x-12y+2=0$ и $9x-12y+10=0$.
- На правата $x+y-8=0$ определи точки кои се еднакво оддалечени од точката $M(2,8)$ и од правата $x-3y+2=0$.
- * Низ пресечната точка на правите $x-7y+6=0$, $7x+y-58=0$ најди права така што точката $M(1,1)$ да е на растојание 5 единици од бараната права.
- Координатите на темињата на триаголникот ABC се:
 - а) $A(3,5)$, $B(7,-4)$, $C(11,-13)$; б) $A(-1,4)$, $B(3,1)$, $C(7,5)$.
 Најди ги должините на висините на триаголникот ABC.
- Најди равенка на права која е на растојание 4 единици од правата $3x+4y-8=0$.
- Напиши равенка на права која минува низ точката $A(3,12)$, и е на растојание $d = \sqrt{58}$ од точката $B(7,2)$.
- Испитај дали точките $A_1(2,3)$ и $A_2(3,4)$ лежат во иста полурамнина чиј раб е правата $5x-12y+8=0$.
- Напиши ги равенките на симетралите на аглиите определени со правите $4x+3y-9=0$ и $5x+12y+24=0$.
- Опреди го параметарот m , така што растојанието од точката $A(2,3)$ до правата $8x+15y+m=0$ да биде 5 единици.
- * Дадени се равенките на две страни на правоаголник $3x-2y-5=0$ и $2x+3y+7=0$ и едно негово теме $A(-2,1)$. Пресметај ја плоштината на правоаголникот.
- * Најди ги координатите на центарот на впишаната кружница во триаголник чии страни се: $2x+y-2=0$, $x+2y+4=0$ и $2x-y+6=0$, а потоа пресметај го радиусот на кружницата.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ (4.1 И 4.2)

- Во кои квадранти лежат точките $M_1(a,b)$ и $M_2(-a,b)$? Во каква заемна положба се во однос на у-оската?
- Најди ги координатите на точката A' симетрична со точката $A(4,-2)$ во однос на оската x .
- Опреди точка M' симетрична со точката $M(-2,3)$ во однос на оската y .
- Во координатниот систем претстави ја точката B' симетрична на точката $B(2,5)$ во однос на координатниот почеток.
- Дадена е точката $M(5,6)$. Најди ја точката M' симетрична во однос на: а) симетралата на првиот и третиот квадрант; б) симетралата на вториот и четвртиот квадрант.
- Векторот $\overrightarrow{OM} = (2,4)$ претстави го во координатен систем и определи ја неговата должина (интензитет).
- Даден е векторот $\overrightarrow{AB}$ со своите крајни точки $A(1,3)$ и $B(4,-1)$. Опреди ги компонентите и должината на векторот $\overrightarrow{AB}$.
- Опреди ги координатите на збирот и разликата на векторите $\vec{a} = (3,2)$ и $\vec{b} = (2,4)$.
- Во координатниот систем конструирај го векторот $\vec{a} = (2,5)$, ако неговата почетна точка е:
а) координатниот почеток; б) точката $A(-2,5)$.
- Кои се координатите на векторот $\vec{x}$, од кој, ако се одземе векторот $\vec{a} = (5,-1)$ се добива векторот $\vec{c} = (7,0)$.
- Опреди ги координатите на векторот $\vec{x}$, кој помножен со бројот 3 го дава векторот $\vec{a} = (2, -\frac{1}{3})$.
- Опреди го векторот $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$ ако се дадени: $\vec{a} = (2,5)$, $\vec{b} = (4,10)$, $\vec{c} = (-4,-10)$, $\vec{d} = (1,-1)$.
- Конструирај ги радиус-векторите: а) $\overrightarrow{OA} = (2,0)$; б) $\overrightarrow{OB} = (0,3)$; в) $\overrightarrow{OD} = (-3,-5)$;
г) $\overrightarrow{OE} = (4,-3)$.
- Опреди го растојанието меѓу точките:
а) $A(2,5)$ и $B(14,10)$; б) $A(5,2)$ и $B(1,-1)$; в) $A(-6,3)$ и $B(0,-5)$.
- На у-оската определи точка M еднакво оддалечена од точките $A(5,0)$ и $B(2,4)$.
- Точката M лежи на симетралата на првиот квадрант на координатниот систем и е еднакво оддалечена од точката $A(6,2)$ и од координатниот почеток. Опреди ги координатите на точката M .
- Пресметај ја плоштината на квадрат, ако се дадени две негови спротивни темиња $A(3,5)$ и $C(1,3)$.
- Опреди го центарот и радиусот на кружницата опишана околу триаголник чии темиња се: $A(-3,6)$, $B(9,-10)$ и $C(-5,4)$.
- Опреди дали триаголник со темиња $A(1,1)$, $B(2,3)$ и $C(5,-1)$ е правоаголен?
- Опреди ги координатите на точката M која отсечката $AB[A(1,6), B(21,9)]$ ја дели во однос 1:3.
- Со точката M отсечката $AB[A(27,-18), B(-6,12)]$ е поделена во однос:
а) $k = \frac{2}{3}$; б) $k = -\frac{5}{6}$; в) $k = -\frac{4}{3}$. Опреди ги координатите на точката M .
- Опреди го тежиштето на триаголник ABC со темиња $A(-4,4)$, $B(4,-7)$ и $C(6,6)$.

23. Дадени се три темиња на паралелограм $A(4,-1)$, $B(2,3)$ и $C(0,5)$. Определи ги координатите на четвртото теме.
24. Отсечката $M_1M_2[M_1(-6,-3), M_2(6,6)]$ е разделена на три еднакви дела. Определи ги координатите на добиените точки.
25. Определи ги должините на тежишните линии на триаголник чии темиња се $A(2,6)$, $B(14,15)$ и $C(8,23)$.
26. Провери дали точката $A(3,1)$ лежи на правата $3x - 2y - 7 = 0$.
27. Нацртај ги графици на функциите дадени со равенките:
а) $x - y = 0$; б) $2x - y + 1 = 0$; в) $4x - y + 3 = 0$.
28. Напиши равенка на права, ако е дадено:
а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $n = 4$; б) $\alpha = 120^\circ$ и $n = -8$; в) $\alpha = 300^\circ$ и $n = -5$.
29. Напиши равенка на права паралелна со x -оската, а на y -оската отсекува отсечка со должина: а) 5 единици; б) -3 единици.
30. Дадени се равенките на правите: а) $3x - y - 3 = 0$; б) $14x - 7y + 1 = 0$; в) $-x + 2y + 6 = 0$. Определи го коефициентот на правецот (аголниот коефициент) и отсечката што ја отсекува на y -оската.
31. Напиши равенка на права што минува низ дадена точка M и на y -оската отсекува отсечка n , ако:
а) $M(-3,6)$ и $n = 12$; б) $M(1,0)$ и $n = -7$.
32. Како гласи равенката на права ако аголот што го зафаќа со позитивната насока на x -оската е 90° , а е паралелна со y -оската и од неа е на растојание:
а) 8 единици; б) -4 единици.
33. Во равенката на правата $4x - my - 7 = 0$, определи го параметарот m , така што правата на y -оската да отсекува отсечка со должина 14 единици.
34. Во равенката на правата $mx - y - 3m + 6 = 0$, определи го параметарот m , така што правата на x -оската да отсекува отсечка со должина 14 единици.
35. Најди ја равенката на правата што минува низ точката $A(3,-7)$ и на координатните оски отсекува отсечки кои се: а) еднакви; б) едната е двапати поголема од другата.
36. Низ точката $M(-4,3)$ напиши равенка на права паралелна со правата $x + 2y + 3 = 0$.
37. Низ точката $N(6,2)$ напиши равенка на права нормална на правата $x - 4y - 7 = 0$.
38. Најди ја равенката на правата која ја содржи висината BB' на триаголникот, чии темиња се $A(2,6)$, $B(-3,1)$ и $C(6,0)$.
39. Определи го параметарот m , така што пресекот на правите $(5m + 1)x + (3m + 2)y = 15$ и $(13m - 14)x - (2m - 5)y - 9 = 0$ да лежи на правата $x + y - 3 = 0$.
40. Страните на еден триаголник се: $x - y - 3 = 0$, $2x - 7y - 6 = 0$ и $2x + 3y + 14 = 0$. Определи го: а) периметарот; б) должините на тежишните линии.
41. Координатите на темињата на триаголникот се $A(-5,8)$, $B(-5,2)$ и $C(3,0)$. Напиши ги равенките на симетралите на страните, а потоа најди ги координатите на центарот на кружницата опишана околу триаголникот.
42. Определи ги тангенсите на внатрешните агли на триаголник чии страни лежат на правите: а) $x + 2y = 0$, $3x - y = 0$, $x + y - 4 = 0$;
б) $18x + 16y - 17 = 0$, $14x - 7y + 15 = 0$, $5x + 10y - 9 = 0$.
43. Определи го параметарот m , така што правите $5x + my - 5m = 0$ и $x + 3y + 10 = 0$ зафаќаат агол од 45° .
- 44* Определи ги параметрите m и n , така што правата $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ минува низ точката $A(2,1)$ и со правата $2x - y - 1 = 0$ зафаќа агол од 45° .
45. Координатите на темињата на триаголник се: $A(0,0)$, $B(2, \frac{9}{2})$, $C(5,2)$. Определи ги должините на висините.

46. Напиши равенка на права која минува низ пресечната точка на правите $5x - 3y - 3 = 0$ и $3x + y - 13 = 0$ и е нормална на втората дадена права.
47. Низ точката $A(-4, 12)$ напиши равенка на права чие растојание од точката $B(-10, 5)$ ќе биде 2 единици.
48. Дадена е точката $M(3, -2)$ и правата $2x - y - 3 = 0$. Најди ја точката M' симетрична на точката M во однос на дадената права.
49. Светлосен зрак, насочен по правата $l: y = \frac{2}{3}x - 4$ се одбива од x -оската. Определи ја точката во која се одбива зракот и равенката на правата по која се одбива зракот.
50. Напиши равенка на права која е на растојание $\sqrt{5}$ од точката $M(2, 3)$ и е:
а) паралелна на правата $2x - y + 3 = 0$; б) нормална на правата $3x - 6y - 2 = 0$.
51. Напиши ги равенките на симетралите на аглите добиени со пресекот од правите $2x - y - 5 = 0$ и $2x - 4y - 15 = 0$.
52. Најди го множеството точки чие растојание од точките $A(3, 2)$ и $B(2, 3)$ е еднакво.
53. Најди го множеството точки чие растојание до правите $3x + 4y - 25 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$ е еднакво.
54. Најди ја равенката на симетралата на остриот агол, заграден од правите $3x + 4y - 36 = 0$ и $4x + 3y + 15 = 0$.
- 55* Дадени се равенките на симетралите на два внатрешни агла на триаголникот ABC : $x + 4 = 0$ и $4x + 7y + 5 = 0$, и равенката $3x + 4y = 0$ на страната определена со темињата на аглите низ кои минуваат дадените симетрали. Најди ги равенките на другите две страни на триаголникот.

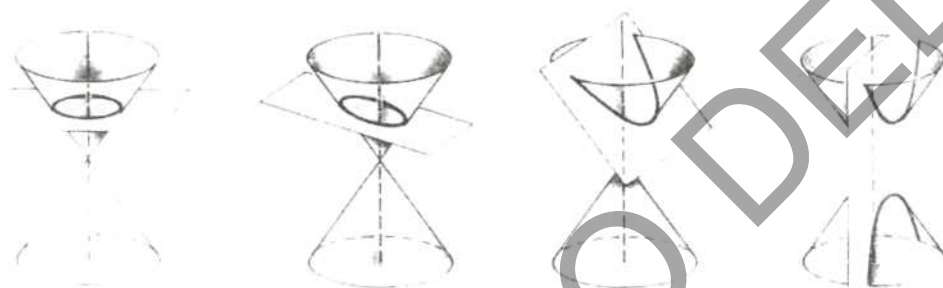
АПОЛОНИЈ од ПЕРГА (262? - 180?) - старогрчки математичар и астроном.

Прочуен е по своето дело Конусни пресеци во осум книги, од кои последната не е сочувана. Во ова дело ја развива теоријата на криви од втор ред, строго и систематски, со толкава целосност, така што два милениума немало што да и се додаде или одземе. Тој ги разгледува кривите од втор ред како пресеци на рамнина и прав (или кос) конус со кружна основа. Ги дава и денес актуелните имиња на тие пресеци: елипса, хипербола и парабола. Денес имајќи го на располагање аналитичкиот апарат, лесно се оперира во оваа област и тешко можеме во целост да ја разбереме големината на делото на Аполониј.

4.3. КРИВИ ОД ВТОР РЕД

Во првиот дел на оваа тема видовме како се составува равенка на права линија, која е една од наједноставните линии. Притоа, видовме дека равенката на права е линеарна равенка, т.е. равенка од прв степен во однос на променливите x и y .

Сега ќе го разгледаме прашањето за составување равенки на неколку криви линии познати како **криви од втор ред** или **конусни пресеци**: кружница, елипса, хипербола и парабола. Овие криви, како што можеш да видиш од црт.1 се добиваат во пресекот на исправена конусна површина со рамнина во различни положби, па оттаму и името конусни пресеци.



црт.1

Равенките на овие криви линии се равенки од втор степен по променливите голедини x и y (координатите на точките), т.е. равенки од видот

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

каде A, B, C, D, E, F се реални броеви, и барем еден од коефициентите A, B, C е различен од нула. Затоа овие криви се познати уште и како **криви од втор ред**.

Забелешка. Кривите од втор ред биле изучувани уште од старогрчките математичари (Аρχимед, Аполониј, Евклид, и др.), и тие главно ги разгледувале како пресек на конус со рамнина. Интересот за нивно детално изучување особено се зголемил по откритието дека планетите се движат по криви (траектории) што претставуваат елипси (во почетокот на XVII век), и оттогаш и започнало изучувањето на кривите од втор ред со методите на аналитичката геометрија.

4.3.1 КРУЖНИЦА. РАВЕНКА НА КРУЖНИЦА

Дефиницијата на кружница од геометријска гледна точка веќе ти е позната, но да се потсетиме.

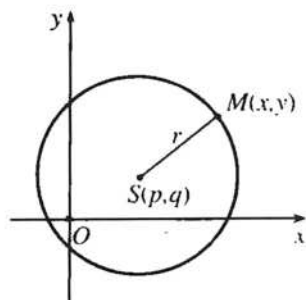
Дефиниција. Кружница е множеството на сите точки $M(x, y)$ во рамнината xOy кои се на еднакво растојание r од дадена точка $S(p, q)$ во таа рамнина.

Со други зборови, кружница K е множеството

$$K = \{M(x, y) \mid \overline{SM} = r\}$$

(1)

Точката S ја викаме **центар**, а растојанието r **радиус** на кружницата.



црт.1

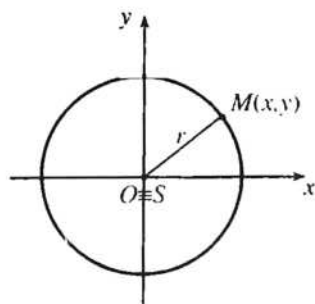
Си поставуваме задача, да ја најдеме равенката на множеството точки K определено со (1). Од дефиницијата следува дека за која било точка $M(x, y) \in K$ важи:

$$\overline{SM} = r, \text{ односно } \overline{SM}^2 = r^2.$$

Користејќи ја формулата за растојание меѓу две точки, растојанието $\overline{SM}$ го изразуваме со координатите на точките $M(x, y)$ и $S(p, q)$ и равенството (1) го запишуваме во вид:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \quad (2)$$

Равенката (2) претставува **равенка на кружница** со центар во точката $S(p, q)$ и радиус r , во нормален вид. Ако центарот на кружницата се совпаѓа со координатниот почеток O тогаш $p = q = 0$ (црт.2) и равенката (2) на кружницата го добива видот:



црт.2

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (3)$$

и се нарекува **централна равенка** на кружницата.

➤ **Пример 1.** Да ја составиме равенката на кружницата со радиус $r = 5$ и центар во $S(2, -4)$.

Решение. Ако во равенката (2) замениме

$$r = 5, p = 2, q = -4, \text{ добиваме } (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25 \blacksquare$$

➤ **Пример 2.** Равенката на кружницата со центар во координатниот почеток и радиус 7 ќе ѝ биде: $x^2 + y^2 = 49 \blacksquare$

Ќе покажеме дека, равенката на кружницата е специјален случај на општата равенка од вториот степен

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (4)$$

Навистина, ако во равенката на кружницата (2) ги развијеме квадратите на биномите, добиваме:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0 \quad (5)$$

Споредувајќи ги равенките (4) и (5) заклучуваме дека, равенката (4) можеби ќе претставува равенка на кружница ако се исполнети релациите

$$A = C \neq 0, B = 0, \quad (6)$$

при кои таа има вид

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (7)$$

или ако двете страни ги поделиме со A добиваме:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0. \quad (8)$$

Следува, равенките (5) и (7), односно (8), се еквивалентни ако покрај (6) се исполнети и условите:

$$\left. \begin{aligned} -2p &= \frac{D}{A} \Rightarrow p = -\frac{D}{2A} \\ -2q &= \frac{E}{A} \Rightarrow q = -\frac{E}{2A} \\ p^2 + q^2 - r^2 &= \frac{F}{A} \Rightarrow r^2 = p^2 + q^2 - \frac{F}{A} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

од каде пак следува:

$$r = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{F}{A}} = \sqrt{\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}} = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}} = \frac{1}{2A} \sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}. \quad (10)$$

Значи, равенката (4), при условот $A = C \neq 0, B = 0$, геометриски може да претставува: 1° кружница - ако $D^2 + E^2 - 4AF > 0$;

2° точка - ако $D^2 + E^2 - 4AF = 0$;

3° ништо (празно множество) - ако $D^2 + E^2 - 4AF < 0$.

Равенката на кружницата во вид (7) ја викаме **општ вид** равенка на кружница.

➤ **Пример 3.** Да ги определиме центарот и радиусот на кружницата

$$4x^2 + 4y^2 + 80x + 12y + 9 = 0.$$

Решение. Прво да провериме дали е исполнет условот дадената равенка да претставува кружница. За коефициентите на дадената кружница имаме: $A = C = 4, B = 0, D = 80, E = 12, F = 9$, што значи првиот услов (6) е задоволен. Бидејќи

$D^2 + E^2 - 4AF = 80^2 + 12^2 - 4 \cdot 40 \cdot 9 = 6400 + 144 - 1440 > 0$, задоволен е и вториот услов, па следува дека дадената равенка е равенка на кружница. Ако коефициентите A, D, E и F ги

замениме во релациите (9) добиваме: $p = -\frac{80}{2 \cdot 4} = -10, q = -\frac{12}{2 \cdot 4} = -\frac{3}{2}, r^2 = 100 + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 100$, а

потоа нив ги заменуваме во равенката (2) и ја запишуваме равенката на кружницата во нормален вид: $(x+10)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = 100$ ■

Забелешка. Во практиката, најчесто општиот вид на равенката на кружницата го сведуваме во нормален вид така што квадратниот и линиерниот член по x и y ги надополнуваме до полн квадрат (оваа трансформација ти е позната од минатата учебна година). Така за дадената равенка имаме:

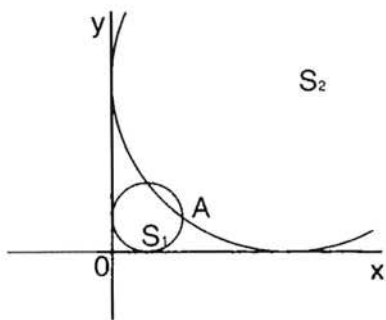
$$4x^2 + 4y^2 + 80x + 12y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 20x + 3y + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$[x^2 + 20x + \left(\frac{20}{2}\right)^2 - \left(\frac{20}{2}\right)^2] + [y^2 + 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2] + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+10)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 - 100 = 0 \text{ т.е. } (x+10)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = 100 \text{ ■}$$

➤ **Пример 4.** Да ја најдеме равенката на кружницата што ги доира двете координатни оски и минува низ точката $A(2,1)$.

Решение (црт.3). Во овој случај очигледно е дека $p=q=r$, па со замена на x, y со координатите на точката A во равенката на кружницата (2) добиваме:



црт.3

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2 \Leftrightarrow 4 - 4r + r^2 + 1 - 2r + r^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 6r + 5 = 0 \text{ т.е. } r_1 = 1 \text{ и } r_2 = 5.$$

Според тоа, добиваме две кружници кои ги задоволуваат условите на задачата. Нивните равенки се: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ и $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ ■

➤ **Пример 5.** Да ја најдеме равенката на кружницата која минува низ точките $A(-1,2)$ и $B(6,9)$, а центарот и е на x -оската.

Решение. Бидејќи центарот S лежи на x -оската, неговите координати се p и 0 , т.е. $S(p,0)$, па равенката на кружницата ќе биде: $(x-p)^2 + (y-0)^2 = r^2$ т.е. $(x-p)^2 + y^2 = r^2$. Со оглед на тоа дека кружницата минува низ точките A и B , нивните координати ја задоволуваат равенката на кружницата, па имаме: $(-1-p)^2 + 2^2 = r^2$ и $(6-p)^2 + 9^2 = r^2$, од каде

$$1 + 2p + p^2 + 4 = 36 - 12p + p^2 + 81 \Leftrightarrow 14p = 112 \Leftrightarrow p = 8.$$

Ако вредноста $p = 8$ ја замениме во една од претходните равенки го добиваме радиусот на кружницата r , т.е. $r^2 = (-1-8)^2 + 2^2 = 81 + 4 = 85$. Равенката на бараната кружница е $(x-8)^2 + y^2 = 85$. ■

➤ **Пример 6.** Да ја определиме равенката на кружницата што минува низ точките $A(2,3)$ и $B(-1,1)$, а центарот и лежи на правата $l: x - 3y - 11 = 0$.

Решение. Да ја означиме со K бараната кружница. Бидејќи центарот $S(p,q)$ лежи на дадената права имаме: $p - 3q - 11 = 0$. Од условот $A \in K \Rightarrow (2-p)^2 + (3-q)^2 = r^2$, а од $B \in K \Rightarrow (-1-p)^2 + (1-q)^2 = r^2$. Значи, за определување на p, q и r добиваме систем од три равенки со три непознати:

$$\begin{cases} p - 3q = 11 \\ p^2 + q^2 - 4p - 6q + 13 = r^2 \\ p^2 + q^2 + 2p - 2q + 2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p - 3q = 11 \\ 6p + 4q = 11 \\ p^2 + q^2 + 2p - 2q + 2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{7}{2} \\ q = -\frac{5}{2} \\ r^2 = \frac{65}{2} \end{cases}$$

Следува, равенката на бараната кружница е: $(x - \frac{7}{2})^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \frac{65}{2}$ ■

ЗАДАЧИ

1. Кои геометриски линии се претставени со следниве равенки:

а) $x^2 + y^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 = 1$; в) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$;

г) $(x-1)^2 + y^2 = 1$; д) $x^2 + (y-1)^2 = 1$

2. Нацртај кружница и напиши ја нејзината равенка, ако се:

а) $p = q = r = 1$; б) $p = q = r = 5$; в) $p = 3, q = 5, r = 3$; г) $p = q = 0, r = 2$;

- д) $p = -3, q = -3, r = 2$; е) $p = -5, q = 3, r = 2$; ж) $p = 3, q = -5, r = 2$.
3. Како гласи равенката на кружницата со центар $S(-4, -2)$ која минува низ точката $A(-4, 6)$?
4. Определи ги координатите на центарот и радиусот на кружницата, чии равенки се:
 а) $x^2 - 10x + y^2 + 12y - 83 = 0$; б) $x^2 + y^2 + 14x + 40 = 0$;
 в) $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0$; г) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$.
5. Сведи ги во нормален вид равенките на кружниците:
 а) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; б) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$; в) $144x^2 + 144y^2 - 648x + 960y + 565 = 0$.
6. Како гласи равенката на кружницата која е концентрична со кружницата $x^2 + y^2 + 3x - 4y - 1 = 0$ и минува низ точката $A(-3, 4)$?
7. Во равенката на кружницата $x^2 + y^2 - (k - 4)x - ky + 2k + 5 = 0$, определи го k , така што кружницата да ја допира y -оската.
8. Во равенката на кружницата $x^2 + y^2 + (k + 2)x - (2k - 2)y + 2k + 1 = 0$, определи го k така што кружницата ги допира двете координатни оски.
9. Напиши равенка на кружница која ги допира двете координатни оски и правата $l: 3x + 4y - 5 = 0$ (правата во тој случај веќе знаеш дека се вика тангентата на кружницата).
10. Напиши равенка на кружница по која ги допира правите $y + 8 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$.
11. Определи ги пресечните точки на правата $x + 3y - 7 = 0$ и кружницата $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$.
12. Во зависност од коефициентот k на равенката $kx - y - 13 = 0$, испитај ја природата на решенијата на системот: $\begin{cases} kx - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 \end{cases}$. Која е геометриската интерпретација на решението?

4.3.2. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И КРУЖНИЦА

Од досегашното изучување на геометријата познато ти е дека дадена права l и кружница K може да имаат една од следниве три заемни положби:

1° *правата и кружницата имаат две заеднички точки, односно правата ја сече кружницата,*

2° *правата и кружницата имаат една заедничка точка, односно правата ја допира кружницата,*

3° *правата и кружницата немаат заеднички точки.*

Ако правата и кружницата се зададени со нивните равенки, тогаш постапката за утврдување на овие односи се сведува на решавање систем од една линеарна и една квадратна равенка

$$\begin{cases} y = kx + n \\ Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$$

што веќе ти е познато од втора година. Имено, видовме дека системот може да има: две реални решенија (правата ја сече кружницата); едно решение (правата и кружницата имаат една заедничка точка) и нема решение (правата и кружницата немаат заеднички точки).

Сега ќе ја разгледаме заемната положба на права и кружница користејќи го апаратот на аналитичката геометрија. Нека се дадени кружницата

$$K: (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

и правата

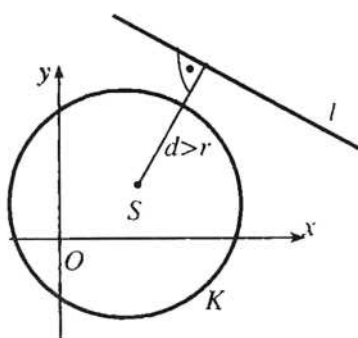
$$l: y = kx + n \text{ - во експлицитен вид,}$$

или

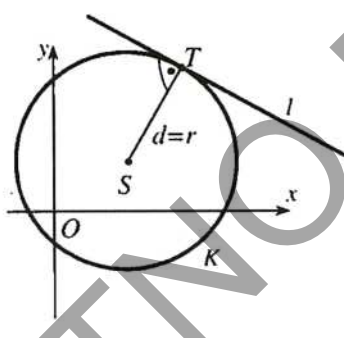
$$kx - y + n = 0 \text{ - во општ вид.}$$

Ако со d го означиме растојанието на центарот $S(p, q)$ на кружницата K до правата l можни се следните три случаи:

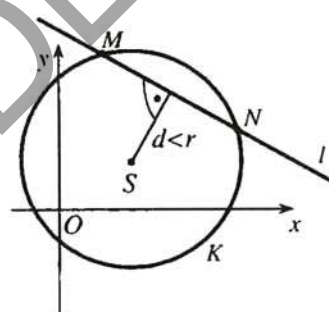
- а) ако $d > r$, тогаш $l \cap K = \emptyset$, т.е. правата и кружницата немаат заеднички точки (црт.1);
- б) ако $d = r$, тогаш $l \cap K = \{T\}$, т.е. правата и кружницата имаат една заедничка (допирна) точка T , односно правата l е тангента на кружницата K (црт.2);
- в) ако $d < r$, тогаш $l \cap K = \{M, N\}$, правата и кружницата имаат две заеднички точки, т.е. правата ја сече кружницата K , и викаме дека l е секанта на кружницата K (црт.3).



црт.1



црт.2



црт.3

Според формулата за растојание од точка до права, за растојанието d од центарот $S(p, q)$ на кружницата K до правата l имаме:

$$d = \frac{|kp - q + n|}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad (1)$$

па погоре искажаните услови за заемната положба на правата и кружницата ја добиваат следнава аналитичка форма:

а) ако $d > r \Rightarrow |kp - q + n| > r\sqrt{k^2 + 1}$, односно $(kp - q + n)^2 > r^2(k^2 + 1)$, правата l и кружницата K немаат заеднички точки;

б) ако $d = r \Rightarrow |kp - q + n| = r\sqrt{k^2 + 1}$, односно $(kp - q + n)^2 = r^2(k^2 + 1)$, правата l ќе ја допира кружницата K , и тогаш релацијата

$$(kp - q + n)^2 = r^2(k^2 + 1) \quad (2)$$

ќе претставува **услов за допир** на права l и кружница K ;

в) ако $d < r \Rightarrow |kp - q + n| < r\sqrt{k^2 + 1}$, односно $(kp - q + n)^2 < r^2(k^2 + 1)$, правата l и кружницата K имаат две заеднички точки.

Специјално, ако кружницата K е со центар во координатниот почеток, тогаш $p = q = 0$, па горните услови во овој случај гласат:

а) ако $d > r \Rightarrow n^2 > r^2(k^2 + 1)$, правата l и кружницата K немаат заеднички точки;

б) ако $d = r \Rightarrow n^2 = r^2(k^2 + 1)$, правата l ја допира кружницата K и релацијата

$$r^2(k^2 + 1) = n^2 \quad (3)$$

претставува услов за дојир на правата l и централна кружница K ;

в) ако $d < r \Rightarrow n^2 < r^2(k^2 + 1)$, правата l и кружницата K имаат заеднички точки.

► **Пример 1.** Да ја испитаме заемната положба на правата $l: x + y + 5 = 0$ и кружницата $K: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

Решение. Кружницата е со центар во точката $S(1, 2)$ и радиус $r = 5$. Растојанието d од центарот $S(1, 2)$ до правата е:

$$d = \frac{|1 + 2 + 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \quad d^2 = 32$$

Бидејќи $d^2 = 32 > 25 = r^2$ следува $d > r$, т.е. правата l и кружницата немаат заеднички точки.

Забелешка. До истиот заклучок ќе дојдеме и ако го разгледаме решението на системот равенки:

$$\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 5 \\ (x - 1)^2 + (-x - 5 - 2)^2 - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 5 \\ 2x^2 + 12x + 25 = 0 \end{cases}$$

Дискриминантата D на квадратната равенка е: $D = 144 - 200 = -56 < 0$, па следува дека системот нема реални решенија, т.е. правата и кружницата немаат заеднички точки. ■

► **Пример 2.** Да ја испитаме заемната положба на правата $l: x - y + 2 = 0$ и кружницата $K: x^2 + y^2 - 2x - 8y + 2 = 0$.

Решение. Координатите на центарот и радиусот на кружницата се:

$$p = 1, q = 4, r^2 = 15. \text{ За растојанието од центарот до дадената права имаме: } d = \frac{|1 - 4 + 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следува: $d^2 = \frac{1}{2} < 15 = r^2$, т.е. $d < r$, што значи правата ја сече кружницата. Нека

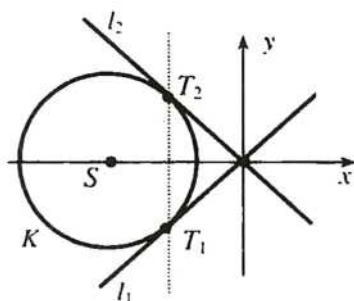
$l \cap K = \{M, N\}$. Да ги определиме координатите на пресечните точки M и N . Имаме:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 + y^2 - 2x - 8y + 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 + (x + 2)^2 - 2x - 8(x + 2) + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 - 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Следува, пресечните точки на правата и кружницата се $M(\frac{3+\sqrt{29}}{2}, \frac{7+\sqrt{29}}{2})$ и $N(\frac{3-\sqrt{29}}{2}, \frac{7-\sqrt{29}}{2})$. ■

► **Пример 3.** За правата $l: y = kx$ да ги определиме вредностите на параметарот k така што:

- ја пресекува кружницата $K: x^2 + y^2 + 10x + 16 = 0$;
- ја допира кружницата;
- нема заедничка точка со таа кружница.



црт.4

Решение. Координатите на центарот на кружницата се $p = -5, q = 0$ и $r^2 = 9$. Растојанието d од центарот на кружницата до правата е:

$$d = \frac{|k \cdot (-5) - 0|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5k|}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad \text{или} \quad d^2 = \frac{25k^2}{k^2 + 1}.$$

а) Условот $d < r$, односно $d^2 < r^2$ е исполнет ако $\frac{25k^2}{k^2 + 1} < 9$

$$\Leftrightarrow 25k^2 < 9k^2 + 9 \Leftrightarrow 16k^2 < 9 \Leftrightarrow |k| < \frac{3}{4}. \text{ Значи, правата ја}$$

пресекува кружницата за сите вредности на k такви што:

$$-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{4}.$$

б) Слично како под а), од условот $d = r$, добиваме $k = \pm \frac{3}{4}$. Значи, имаме две прави што

ја допираат кружницата: $l_1: y = \frac{3}{4}x$ и $l_2: y = -\frac{3}{4}x$. Допирните точки $T_1 = l_1 \cap K$, $T_2 = l_2 \cap K$

ќе ги најдеме како решенија на системите:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ x^2 + y^2 + 10x + 16 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x \\ x^2 + y^2 + 10x + 16 = 0 \end{cases}$$

соодветно, од каде добиваме:

$$T_1(-\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}) \text{ и } T_2(-\frac{16}{5}, \frac{12}{5}) \text{ (црт.4).}$$

в) За $|k| > \frac{3}{4}$, т.е. $k < -\frac{3}{4}$ или $k > \frac{3}{4}$, правата и кружницата немаат заеднички точки ■

► **Пример 4.** Да ја определиме заемната положба на правата $l: x - y + 10 = 0$ и кружницата $K: x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Да го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} x - y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 10 \\ 2x^2 + 20x + 99 = 0 \end{cases}$$

Бидејќи дискриминанта на квадратната равенка $2x^2 + 20x + 99 = 0$ е $D = -392 < 0$, заклучуваме дека правата и кружницата немаат заеднички точки. ■

► **Пример 5.** Да ја определиме ординатата q на центарот S на кружницата $(K): (x-5)^2 + (y-q)^2 = 20$, така што кружницата ја допира правата $(l): x - 2y + 1 = 0$.

Решение. Ќе го користиме условот (2) за допир на права и кружница. Од равенките на правата и кружницата наоѓаме: $k = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$; центарот на кружницата е во точката $S(5, q)$ и $r^2 = 20$. Сега, од условот за допир имаме: $(\frac{5}{2} - q + \frac{1}{2})^2 = 20(\frac{1}{4} + 1) \Leftrightarrow (3 - q)^2 = 25$, од каде добиваме $q_1 = 8$ и $q_2 = -2$. Значи, постојат две кружници кои го исполнуваат дадениот услов:

$$K_1: (x-5)^2 + (y-8)^2 = 20 \quad \text{и} \quad K_2: (x-5)^2 + (y+2)^2 = 20.$$

Обиди се резултатот да го прикажеш во координатен ситем. ■

ЗАДАЧИ

- Опреди ги пресечните точки на правата l и кружницата K :
а) $l: 2x - y + 2 = 0, K: (x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$; б) $l: x - y - 1 = 0, K: (x-2)^2 + y^2 = 16$.
- Опреди ги пресечните точки на правата l определена со точките $A(0,1), B(-2,0)$ и кружницата $K: x^2 + y^2 = 4$.
- Напиши ја равенката на кружницата K , која минува низ точките $A(0,6), B(0,10)$ и ја допира правата $x = 4$.
- Напиши равенка на кружница која ги допира координатните оски и правата $3x + 4y - 5 = 0$.
- Како гласи равенката на кружницата K , која минува низ координатниот почеток, ја допира правата $l: 5x - 12y - 26 = 0$, а центарот S и лежи на x -оската?
- Напиши равенка на кружница која ги допира страните на триаголник чии равенки се $2x - y - 5 = 0, 2x - y - 10 = 0$ и $x - 2y - 7 = 0$.
- Опреди ја равенката на кружницата K , која ги допира правите $l_1: 3x - 4y + 8 = 0, l_2: 12x + 5y - 6 = 0$, а центарот и е на правата $x + y - 2 = 0$.
- Опреди ја равенката на кружницата K , која минува низ точката $M(6,8)$ и ја допира правата $(l): 4x + 3y + 1 = 0$ во точката D со апсциса -1 .
- Опреди го параметарот m , така што правата $x + 3y + m = 0$: а) ја допира; б) нема заедничка точка и в) има две заеднички точки со кружницата $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$.
- Опреди го параметарот a на правата $l: ax + 3y - 6 = 0$ која ја допира кружницата $K: x^2 + y^2 - 4 = 0$.
- Состави равенка на кружницата K , која е концентрична со кружницата $K: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ и ја допира правата $l: 3x - 4y + 7 = 0$.

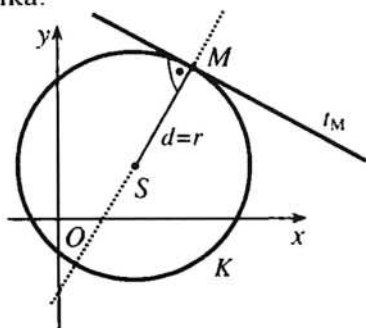
4.3.3. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА И НОРМАЛА ВО ТОЧКА ОД КРУЖНИЦАТА

Во претходната точка го разгледавме случајот кога правата l допира дадена кружница K во една нејзина точка M , која ја нарекуваме **допирна точка**. Од геометријата знаеме дека тангентата t_M во дадена точка M од кружницата е нормална на правата што минува низ центарот S на кружницата и точката M , т.е. $t_M \perp SM$ (црт.1). Врз основа на овие факти ќе ја одредиме равенката на тангентата во дадена точка M од кружницата.

Нека се дадени кружницата K со равенка во нормален вид

$$K: (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \quad (1)$$

и точката $M(x_1, y_1) \in K$. Правата низ центарот на кружницата $S(p, q)$ и $M(x_1, y_1)$ има равенка:



црт.1

$$SM: y - y_1 = \frac{y_1 - q}{x_1 - p} (x - x_1).$$

Од условот $t_M \perp SM$, го наоѓаме коефициентот на правецот на тангентата k_t , т.е.

$$k_t = -\frac{1}{\frac{y_1 - q}{x_1 - p}} = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}$$

па равенката на тангентата гласи:

$$t_M: y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q} (x - x_1)$$

или

$$(x_1 - p)(x - x_1) + (y_1 - q)(y - y_1) = 0 \quad (2)$$

Ќе ја трансформираме равенката (2) во вид погоден за памтење и примена. Бидејќи $M(x_1, y_1) \in K$, важи:

$$(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = r^2. \quad (3)$$

Ако ги собереме равенките (2) и (3), по средување, добиваме:

$$(x_1 - p)(x - x_1) + (y_1 - q)(y - y_1) + (x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - p)[x - x_1 + x_1 - p] + (y_1 - q)[y - y_1 + y_1 - q] = r^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2 \quad (4)$$

Равенката (4) е **равенка на тангентата на кружница во точката $M(x_1, y_1) \in K$** .

Специјално, ако K е централна кружница, т.е. $K: x^2 + y^2 = r^2$, тогаш $p = q = 0$, па равенката на тангентата (4) добива вид:

$$x_1 x + y_1 y = r^2 \quad (5)$$

► **Пример 1.** Да најдешме равенка на тангентата на кружницата $K: x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$, во точката $T(1, y > 0) (T \in K)$.

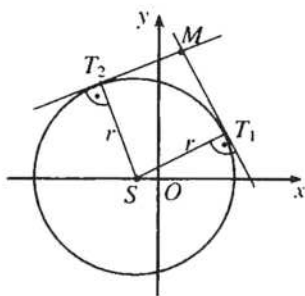
Решение. Прво ја определуваме ординатата на точката T од условот $T \in K$: $1^2 + y^2 + 2 \cdot 1 - 19 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 4$. Поради условот $y > 0$, го земаме само решението $y = 4$, па следува допирната точка да е $T(1, 4)$. Сега равенката на кружницата K ја сведуваме во нормален вид $(x+1)^2 + y^2 = 20$, од кој, согласно со равенката (4), ја добиваме равенката на бараната тангента:

$$(1+1)(x+1) + (4-0)(y-0) = 20 \quad \text{или} \quad t_T: x+2y=9 \quad \blacksquare$$

➤ **Пример 2.** Во пресекојќи на правата $l: 7x+y-25=0$ и кружницата $x^2+y^2=25$ се конструирани тангентите. Да ги најдешме нивните равенки.

Решение. Пресечните точки на правата и кружницата се решенијата на системот равенки:
$$\begin{cases} 7x+y-25=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=4, x_2=3 \\ y_1=-3, y_2=4 \end{cases}$$
 Следува, пресечните точки на правата и кружницата се: $T_1(4, -3), T_2(3, 4)$, па равенките на тангентите ќе бидат $t_1: 4x-3y-25=0$ и $t_2: 3x+4y-25=0$. Испитај каква е меѓусебната положба на двете тангенти ■

➤ **Пример 3.** Од точката $M(1, 6)$ се конструирани тангентите на кружницата $x^2+y^2+2x-19=0$. Да ги најдешме равенките на тангентите.



црт.2

Решение. Познато е дека од една надворешна точка M на кружницата K може да се конструираат две тангенти (црт.1). Со дополнување до полн квадрат ја запишуваме кружницата во нормален вид $K: (x+1)^2 + y^2 = 20$, за која $S(-1, 0)$ и $r^2 = 20$. Нека равенката на тангентата е

$$t: y = kx + n. \quad (1)$$

во која треба да ги определиме коефициентите k и n .

Бидејќи $M \in t$ нејзините координати ја задоволуваат равенката (1), т.е. имаме:

$$6 = k + n. \quad (2)$$

Условот за допир (види (2) од 4.3.3) на правата (1) и кружницата K во дадениов случај е

$$(k \cdot (-1) - 0 + n)^2 = 20(k^2 + 1), \quad \text{односно} \quad (-k + n)^2 = 20k^2 + 20 \quad \text{или}$$

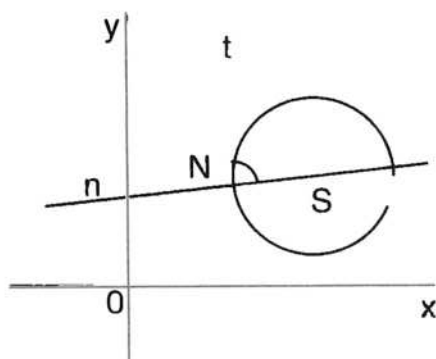
$$19k^2 + 2kn - n^2 + 20 = 0. \quad (3)$$

Значи, за определување на k и n го имаме системот равенки:

$$\begin{cases} k + n = 6 \\ 19k^2 + 2kn - n^2 + 20 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

чиј решенија се: $k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -2$ и $n_1 = \frac{11}{2}, n_2 = 8$. Со замена во (1) ги добиваме тангентите: $t_1: x - 2y + 11 = 0$ и $t_2: 2x + y - 8 = 0$ ■

Пред да го решиме следниот пример да се потсетиме на дефиницијата за нормала на кружница: *нормала на кружницата во дадена точка од неа е правата што е нормална на тангентата на кружницата во дадената точка.*



црт.3

➤ **Пример 4.** Низ точката $N(2,3)$, да повлечеме нормала на кружницата $K: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$.

Решение. Прво да провериме дали точката $N(2,3)$ припаѓа на кружницата. Бидејќи $2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 1 = 20 \neq 0$

следува дека точката N не е на кружницата (црт.3). Од дефиницијата за нормала на кружница следува дека нормалата мора да минува низ центарот на кружницата (зошто?). Равенката на кружницата K во нормален вид е $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 6$ од каде наоѓаме $S(1, -2)$, $r^2 = 6$.

Равенката на нормалата n ќе ја определиме како равенка на права низ две точки N и S $[N(2,3), S(1, -2)]$. Следува $n: y + 2 = \frac{3+2}{2-1}(x-1)$ т.е. $5x - y - 7 = 0$ ■

➤ **Пример 5.** Да определиме под кој агол се гледа кружницата $K: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$ од точката $M(3, 6)$?

Решение. Бараниот агол е аголот меѓу тангентите конструирани од точката $M \notin K$ до кружницата K (види го решението на пример 3). Нека равенката на тангентата е $l: y = kx + n$. Од условот $M \in l$, добиваме $6 = 3k + n$, а од условот за допир на правата l и кружницата K имаме: $(2k - 1 + n)^2 = 13(k^2 + 1)$. Значи за да ги определиме k и n , го добиваме системот
$$\begin{cases} 3k + n = 6 \\ (2k - 1 + n)^2 = 13(k^2 + 1) \end{cases}$$
 Откако ќе го решиме горниот систем ги наоѓаме тангентите: $t_1: 2x - 3y + 12 = 0$ и $t_2: 3x + 2y - 21 = 0$. Коефициентите на правци на тангентите t_1 и t_2 се $k_1 = \frac{2}{3}$ и $k_2 = -\frac{3}{2}$ соодветно. Бидејќи $k_1 \cdot k_2 = -1$, следува $t_1 \perp t_2$. Значи, од точката M кружницата се гледа под прав агол ■

ЗАДАЧИ

1. Напиши равенка на тангента во точката T од кружницата K ако е:
 - а) $K: x^2 + (y-2)^2 = 5, T(2,3)$; б) $K: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10, T(-2, y > 0)$;
 - в) $K: (x+1)^2 + (y-3)^2 = 1, T(x > 0; 1)$.
2. Напиши равенка на тангента во точката T од кружницата K , ако е:
 - а) $K: x^2 + y^2 = 5, D(2,1)$; б) $K: x^2 + y^2 = 10, T(-3,1)$;
 - б) в) $K: x^2 + y^2 = 20, D(4, y < 0)$; г) $K: x^2 + y^2 = 18, D(x < 0,3)$.
3. Напиши равенка на тангента на кружницата $K: x^2 + y^2 - 6x - 10y + 29 = 0$ во допирната точка $T(4, y > 5)$.

- Опреди ги темињата на триаголник, во кој е впишана кружницата $K: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$, ако допирните точки се $D_1(4,2)$, $D_2(-2,2)$ и $D_3(2,-2)$.
- Колкав агол зафаќа тангентата на кружницата $K: x^2 + y^2 = 5$, повлечена во точката $T(2,1)$, со правата определена со точките $A(2,3)$ и $B(-1,-6)$?
- Најди ја равенката на тангентата на кружницата $K: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, нормална на правата $x - 2y + 9 = 0$.
- Напиши равенка на тангентата на кружницата $K: x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, паралелна со правата $2x + y - 7 = 0$.

4.3.4. ЕЛИПСА. ЦЕНТРАЛНА РАВЕНКА НА ЕЛИПСА

1. Поимот елипса ти е познат од геометријата, географијата, физиката и др. Оваа крива е од голема практична важност во многу области, од уметноста до астрономијата. На пример, кружен објект гледан од перспектива претставува елипса, природните и вештачките сателити се движат по елиптични патеки. Оттаму произлегува и потребата за нејзино детално проучување.

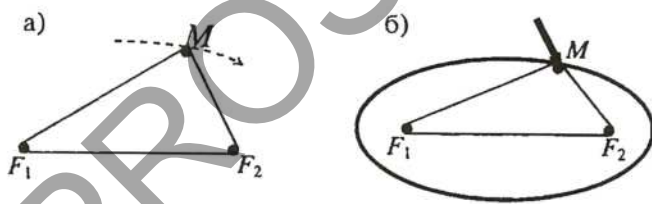
Геометриската дефиниција на елипсата е следната.

Дефиниција. Елипса е множеството од сите точки $M(x,y)$ во рамнината хоу такави што збирот од растојанијата до две фиксни точки F_1 и F_2 од истата рамнина е константен.

Точките F_1 и F_2 се викаат фокусни точки или **фокуси на елипсата**, а средишната точка C на отсечката F_1F_2 - **центар на елипсата**. Значи, елипса е множеството

$$E = \{M(x,y) \mid \overline{MF_1} + \overline{MF_2} = 2a\}$$

Оваа дефиниција за елипсата можеме да ја потврдиме нагледно со една многу едноставна практична постапка, илустрирана на црт.1.



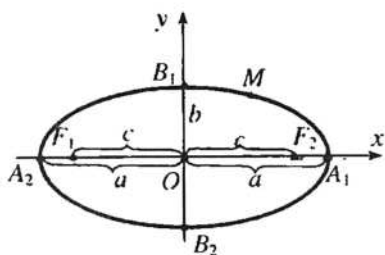
црт.1

Избираме две фиксни точки F_1 и F_2 и околу нив завиткуваме јамка од конец со должина l , така што конечот да не е оптегнат, односно $l > 2 \cdot F_1F_2$. Со врвот на молив го оптегнуваме конечот до точката M , а потоа го влечеме по рамнината држејќи го конечот оптегнат. На овој

начин ќе исцртаме елипса (црт.1б), при што за произволна точка M важи:

$$\overline{MF_1} + \overline{MF_2} + \overline{F_1F_2} = l \quad \text{или} \quad \overline{MF_1} + \overline{MF_2} = l - \overline{F_1F_2}.$$

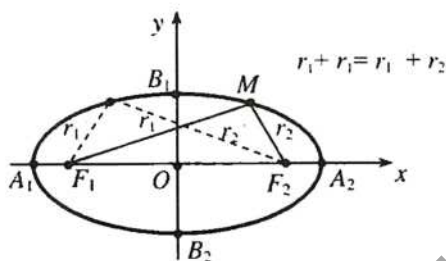
Значи, ако точката M се движи по елипсата збирот $\overline{MF_1} + \overline{MF_2}$ секогаш има константна вредност $l - \overline{F_1F_2}$.



црт.2

Отсечката A_1A_2 се вика **голема оска**, а отсечката B_1B_2 **мала оска** за елипсата. Забележуваме дека, според горните определувања, елипсата е симетрична како во однос на големата, така и во однос на малата оска. Нека должината на големата оска е $2a$ ($a > c$), а должината на малата оска $2b$, т.е. $\overline{A_1A_2} = 2a$, $\overline{B_1B_2} = 2b$.

Бројот a го викаме **голема полуоска**, а **b** **мала полуоска** за елипсата.



црт.3

Растојанијата на точката $M \in E$ до фокусите, $\overline{MF_1} = r_1$ и $\overline{MF_2} = r_2$, ги нарекуваме **фокусни радиуси** за точката M (црт.3). Ќе покажеме дека за произволна точка $M(x, y) \in E$, важи

$$\overline{MF_1} + \overline{MF_2} = 2a \quad (1)$$

Навистина, ако точката M се движи по елипсата, според дефиницијата, сумата $\overline{MF_1} + \overline{MF_2}$ не се менува што значи дека таа е иста и за точките A_1

и B_1 т.е. важи:

$$\overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} = \overline{B_1F_1} + \overline{B_1F_2} \quad (2)$$

Поради симетричноста на F_1 и F_2 во однос на C , имаме

$$\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2} \quad (3)$$

па со замена во (2) наоѓаме:

$$\overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} = 2 \cdot \overline{B_1F_2} \quad (4)$$

Но, исто така (поради симетрија) важи

$$\overline{A_1F_2} = \overline{A_2F_1}$$

па тогаш од (4) добиваме:

$$2 \cdot \overline{B_1F_2} = \overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} = \overline{A_1F_1} + \overline{A_2F_1} = \overline{A_1A_2} = 2a$$

$$\overline{B_1F_2} = a \quad (5)$$

Сега, применувајќи ја Питагоровата теорема за триаголникот B_1CF_2 наоѓаме:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (6)$$

2. Да ја најдеме равенката на елипсата. Од сето горе кажано следува дека за произволна точка $M(x, y)$ од елипсата важи:

$$\overline{MF_1} + \overline{MF_2} = 2a \quad (7)$$

Користејќи ја формулата за растојание меѓу две точки последното равенство го запишуваме во вид:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (8)$$

Равенката (8) е равенка на елипса во избраниот координатен систем, но тој облик не е погоден за практична примена. па затоа равенката (2) ќе ја доведеме до облик погоден за примена.

За таа цел, најнапред равенката (2) можеме да ја запишеме во еквивалентен облик:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

По квадрирање на двете страни и по средување добиваме:

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

а со повторно квадрирање и средување. добиваме:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Бидејќи $a^2 = c^2 + b^2$, односно $a^2 - c^2 = b^2$, последното равенство го добива обликот

$$\boxed{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2} \quad (9)$$

Ако двете страни на равенката (9) ги поделиме со $a^2b^2 \neq 0$, ја добиваме равенката:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (10)$$

Равенката (9), односно (10), е наједноставен вид равенка на елипса и ја нарекуваме **централна или канонична равенка на елипсата**.

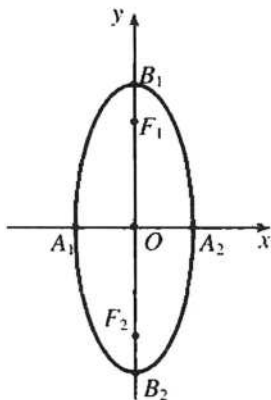
Бидејќи двете променливи се степенувани само на парен степен, од равенката на елипсата (10) непосредно следува нејзината симетрија во однос на координатниот почеток и координатните оски.

Така, ако точката $M(x, y) \in E$, следува дека точките $M_1(-x, -y)$, $M_2(-x, y)$ и $M_3(x, -y)$ исто така припаѓаат на елипсата E .

На пример, точката $M(3, 2)$ лежи на елипсата $E: 8x^2 + 18y^2 = 144$, бидејќи $8 \cdot 9 + 18 \cdot 4 = 144$, од каде веднаш следува дека и точките $M_1(-3, -2)$, $M_2(-3, 2)$, $M_3(3, -2)$ исто така лежат на елипсата.

Бидејќи темињата на елипсата се пресечните точки на елипсата со координатните оски, нивните координати ги добиваме како решенија на системите равенки: $y=0$, $b^2x^2 + a^2 \cdot 0 = a^2b^2 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a$, па $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$; исто така, за $x=0$, $b^2 \cdot 0 + a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \Leftrightarrow y = \pm b$, па $B_1(b, 0)$ и $B_2(-b, 0)$.

Забелешка. За броевите a и b во равенката (10), јасно е дека, според (6), важи $a > b$. Ако фокусите на елипсата се на y -оската. тогаш ќе важи $b > a$ (црт.5)



црт.5

Ако од равенките на елипсата (9) или (10) го изразиме y преку x , добиваме:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (11)$$

Од равенката (11) следува условот $a^2 - x^2 \geq 0$, односно $x^2 \leq a^2$ т.е. $-a \leq x \leq a$. Значи $x \in [-a, a]$.

Обратно, ако равенката (9) ја решиме по x : $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$, добиваме дека $y \in [-b, b]$. Следува дека точките од елипсата се наоѓаат во правоаголник ограничен со правите: $x = \pm a$ и $y = \pm b$.

➤ **Пример 1.** Да ги определиме оските, темињата и фокусите на елипсата $E: x^2 + 4y^2 = 16$.

Решение. Равенката на елипсата E ја сведуваме на нормален вид, т.е. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, од каде $a^2 = 16$ и $b^2 = 4$, значи големата оска е $2a = 8$, а малата оска е $2b = 4$, додека темињата се во точките: $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$, $B_1(0, 2)$ и $B_2(0, -2)$. Координатите на фокусите ги наоѓаме од условот: $a^2 = c^2 + b^2 \Leftrightarrow c = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$, од каде добиваме: $c = \pm \sqrt{16 - 4} = \pm 2\sqrt{3}$, па $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$ и $F_2(2\sqrt{3}, 0)$ ■

➤ **Пример 2.** Да составиме равенка на елипса ако се дадени полуоската $a = 5$ и растојанието на фокусите до центарот на елипсата $c = 3$.

Решение. Потребно е да ја определиме полуоската b . Бидејќи $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$ равенката на елипсата гласи: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ■

➤ **Пример 3.** Да составиме равенка на елипса, ако се знае дека $a + b = 25$ и $c = 5$.

Решение. Треба да ги определиме полуоските a и b . Од системот

$$\begin{cases} a + b = 25 \\ \sqrt{a^2 - b^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 25 \\ a^2 - b^2 = 25 \end{cases}$$

добиваме $a = 13$, $b = 12$, па равенката на елипсата е: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ ■

➤ **Пример 4.** На елипсата $E: 4x^2 + 25y^2 = 100$, да определиме точка чија апсциса е -3 .

Решение. Со директна замена во равенката на елипсата, добиваме:

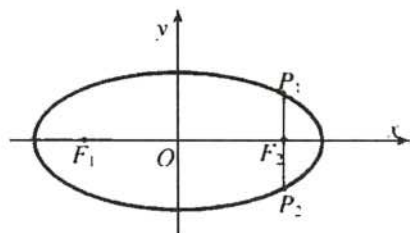
$$4(-3)^2 + 25y^2 = 100 \Leftrightarrow y^2 = \frac{64}{25}, \text{ т.е. } y = \pm \frac{8}{5}.$$

Значи, добиваме две точки $M_1(-3, \frac{8}{5})$ и $M_2(-3, -\frac{8}{5})$, кои се симетрични во однос на x -оската.

Забелешка. Количникот од фокусното растојание $2c$ и големата оска $2a$, се вика **нумерички (броен) ексцентрицитет** т.е. $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ и бидејќи $c < a$, следува $\varepsilon < 1$. Ако $\varepsilon = 0$, тогаш $c = 0$, па $b = a$, и во тој случај равенката (4) преминува во $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ или $x^2 + y^2 = a^2$ што претставува равенка на кружница. Значи, кружницата е специјален случај на елипса со нумерички ексцентрицитет нула, т.е. $a = b$.

► **Пример 5.** Дадена е равенката на елипсата $E: 9x^2 + 36y^2 = 324$. Да ја одредиме должината на тетивата што минува низ фокусот $F_2(c, 0)$ и е паралелна со ординатната оска.

Решение. Тетивата што минува низ $F_2(c, 0)$, ја сече елипсата во точките $P_1(c, y_0)$ и $P_2(c, -y_0)$ (црт. 6). Ординатата y_0 ќе ја одредиме од равенката: $E: y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.



црт.4

Точките P_1 и P_2 лежат на елипсата, па затоа

$$y_0 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} = \pm \frac{b}{a} b = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Тогаш бараните крајни точки на тетивата се:

$P_1(c, \frac{b^2}{a})$, $P_2(c, -\frac{b^2}{a})$, а должината на отсечката е

$$\overline{P_1 P_2} = 2p, \text{ т.е. } \boxed{2p = \frac{2b^2}{a}}.$$

Оваа должина се вика **параметар на елипсата**, а $p = \frac{b^2}{a}$ е **полупараметар**.

За дадената кружница добиваме $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ и $p = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ■

ЗАДАЧИ

1. Состави равенка на елипса ако е познато дека $2a = 30$ и $2c = 18$.
2. Состави равенка на елипса, ако е дадено $a + b = 9$ и $2c = 6$.
3. Состави равенка на елипса, ако фокусното растојание е 8, а малата полуоска 3.
4. Состави равенка на елипса ако е даден бројниот ексцентрицитет $\varepsilon = \frac{1}{3}$ и малата полуоска $b = 4$.
5. Како гласи равенката на елипса, ако се: а) $a - b = 3, \varepsilon = \frac{3}{5}$; б) $a + b = 5, \varepsilon = \frac{4}{5}$.
6. Напиши ја равенката на елипсата што минува низ точките: а) $M(2, 0)$, $N(1, 2)$; б) $M(4, \frac{9}{5})$, $N(\frac{5\sqrt{5}}{3}, 2)$.

7. Определи ги бројниот ексцентрицитет и параметарот на елипсата $E: 4x^2 + 9y^2 = 36$.
8. Определи ги координатите на темињата на елипсата, ако е дадено $a - c = 6$ и $b = 12$.
9. Определи ја положбата на точката M и елипсата E , ако се:
 - а) $M(2,2)$, $E: 5x^2 + 20y^2 = 10$; б) $M(1,6)$, $E: 9x^2 + 16y^2 = 144$; в) $M(1,-1)$, $E: 4x^2 + 9y^2 = 36$.
10. Пресметај ја плоштината на четириаголникот чии темиња се фокусите и краевите на малата оска на елипсата $E: 9x^2 + 25y^2 = 225$.
11. Како гласи равенката на елипсата E , ако малата оска од фокусите се гледа под прав агол и ако е $a = \sqrt{6}$?
12. Околу елипса е опишан правоаголник чии страни се паралелни со оските на елипсата. Определи ги координатите на темињата на правоаголникот.
13. Најди ги пресечните точки на правата $l: 2x - y - 6 = 0$ и елипсата $E: 4x^2 + 9y^2 = 324$.

4.3.5. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И ЕЛИПСА

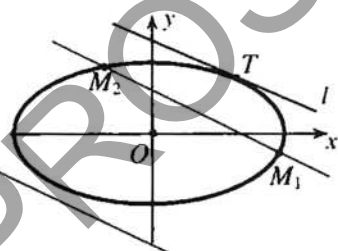
Положбата на правата $l: y = kx + n$ во однос на елипсата $E: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ се одредува во зависност од решенијата на системот равенки:

$$\begin{cases} y = kx + n \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx + n \\ (a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2knx + a^2(n^2 - b^2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Дискриминантата на квадратната равенка е $D = 4a^2b^2(a^2k^2 + b^2 - n^2)$ и од неа зависи какви се решенијата на квадратната равенка, а со тоа и решенијата на системот (1). Притоа можни се следниве три случаи: $D > 0$, $D = 0$ и $D < 0$. Бидејќи $4a^2b^2 > 0$, знакот на D зависи само од знакот на изразот

$$a^2k^2 + b^2 - n^2, \quad (2)$$

па следува:



црт.1

1° ако $D > 0$ т.е. $a^2k^2 + b^2 > n^2$, квадратната равенка има две решенија, значи правата l ја сече елипсата во две точки, т.е. $l \cap E = \{M_1, M_2\}$.

2° ако $D = 0$ т.е. $a^2k^2 + b^2 = n^2$, тогаш правата l и елипсата E имаат една заедничка точка, т.е. $l \cap E = \{T\}$, а релацијата

$$\boxed{a^2k^2 + b^2 = n^2} \quad (3)$$

претставува услов за допир на правата l и елипсата E ;

3° ако $D < 0$ т.е. $a^2k^2 + b^2 < n^2$, тогаш правата l и елипсата E немаат заедничка точка, т.е. $l \cap E = \emptyset$.

➤ **Пример 1.** Дадени се правата $l: 3x - y + 2 = 0$ и елипсата $E: 4x^2 + 16y^2 = 64$. Каква е нивната заемна положба?

Решение. Равенката на елипсата ја сведуваме во облик $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, од каде $a = 4, b = 2$, а од равенката на правата $y = 3x + 2$ имаме $k = 3, n = 2$ и со замена во равенството (3) добиваме $16 \cdot 9 + 4 > 4$, значи правата l ја пресекува елипсата E во две точки т.е. $l \cap E = \{M_1, M_2\}$. Координатите на M_1 и M_2 ги наоѓаме како решенија на системот равенки:

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ 4x^2 + 16y^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 2 \\ 37x^2 + 48x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2, & y_2 = -\frac{70}{37} \\ x_1 = 0, & x_2 = -\frac{48}{37} \end{cases} \text{ . Значи } M_1(0, 2) \text{ и } M_2(-\frac{48}{37}, -\frac{70}{37}) \blacksquare$$

➤ **Пример 2.** Дадена е правата $(l): x + y - n = 0$ и елипсата $E: 9x^2 + 16y^2 = 144$. Да го определиме n така што правата l да ја дојира елипсата E .

Решение. Од равенката на елипсата E добиваме дека $a^2 = 16, b^2 = 9$, а од равенката на правата (l) имаме $k = -1$, па тогаш со замена во равенството (3) добиваме

$$16(-1)^2 + 9 = n^2 \text{ т.е. } n = \pm 5.$$

Равенката на правата е $x + y \pm 5 = 0$ ■

➤ **Пример 3.** За кои вредности на коефициентот k правата $l: kx - y + 11 = 0$ и елипсата $E: 7x^2 + 9y^2 = 1$, немаат заеднички точки?

Решение. Експлицитниот вид на равенка на правата (l) е $y = kx + 11$, од каде $n = 11$, а равенката на елипсата во каноничен вид е $\frac{x^2}{\frac{1}{7}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$, од каде наоѓаме $a^2 = \frac{1}{7}$ и $b^2 = \frac{1}{9}$.

Тогаш, од условот $a^2 k^2 + b^2 < n^2$ имаме $|k| < \frac{8}{3}\sqrt{119}$ т.е. $-\frac{8}{3}\sqrt{119} < k < \frac{8}{3}\sqrt{119}$ ■

➤ **Пример 4.** Од точката $M(-2, 7)$ повлечени се тангентите на елипсата $E: x^2 + 4y^2 = 100$. Како гласат нивните равенки?

Решение. Од една точка што не лежи на елипсата, можат да се повлечат две тангенти до неа (аналогно како кај кружница). Нека бараната равенка на тангентата е $(l): y = kx + n$. Од равенката на елипсата $x^2 + 4y^2 = 100$ имаме $a^2 = 100$ и $b^2 = 25$. Точката

$M \in l$, па затоа $7 = -2k + n$. Со решавање на системот равенки $\begin{cases} -2k + n = 7 \\ 100k^2 + 25 = n^2 \end{cases}$, добиваме

$k_1 = \frac{2}{3}, k_2 = -\frac{3}{8}, n_1 = \frac{25}{3}, n_2 = \frac{25}{4}$. Следува, равенките на тангентите се: $t_1: 2x - 3y + 25 = 0$ и $t_2: 3x + 8y - 50 = 0$ ■

► **Пример 5.** Како гласи равенката на елипсата E , ако се дадени равенките на две нејзини тангенции: $l_1: 3x - 8y - 25 = 0$ и $l_2: 4x + 6y - 25 = 0$?

Решение. Бидејќи елипсата ги допира двете прави, со замена на $k_1 = \frac{3}{8}$, $n_1 = -\frac{25}{8}$ и

$$k_2 = -\frac{2}{3}, n_2 = \frac{25}{6} \text{ во равенството (3), го добиваме системот равенки: } \begin{cases} \frac{9a^2}{64} + b^2 = \frac{625}{64} \\ \frac{4a^2}{9} + b^2 = \frac{625}{36} \end{cases},$$

чије решение е $a^2 = 25$ и $b^2 = \frac{25}{4}$, па равенката на елипсата E е: $E: \frac{x^2}{25} + \frac{4y^2}{25} = 1$ ■

ЗАДАЧИ

- Најди ги пресечните точки на елипсата E и правата l , ако се:
 - $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$ и $l: y = 4x$; б) $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ и $l: x = 3$; в) $E: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ и $l: y = 3$.
- Опреди ја заежната положба на правата l и елипсата E , и ако имаат заеднички точки, опреди ги ако се:
 - $l: 3x + y - 9 = 0$ и $E: 27x^2 + 6y^2 = 162$; б) $l: 2x - y + 6 = 0$ и $E: 4x^2 + 9y^2 = 324$.
- Во равенката на правата $l: y = -x + n$ опреди ги вредностите на параметарот n , така што правата l : а) ја сече елипсата E ; б) ја допира елипсата E ; в) нема заеднички точки со елипсата E , ако елипсата E е $E: 3x^2 + 2y^2 = 60$.
- Во равенката на правата $l: y = -\frac{1}{k}x + \frac{5}{k}$, опреди го k така што правата l е тангентата на елипсата $E: 9x^2 + 16y^2 = 144$.
- Напиши равенка на елипсо, која ја допира правата l и минува низ точката M , ако се:
 - $l: 4x + 15y - 25 = 0$ и $M(3, \frac{4}{5})$; б) $l: x + 4y - 8 = 0$ и $M(-2, \frac{3}{2})$.
- Правата $l: x + y - 5 = 0$, ја допира елипсата E , чии фокуси се $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$. Состави ја равенката на елипсата E .
- Дадена е равенката на тангентата $l: 2x + 3y - 2 = 0$ на елипсата $E: x^2 + 4y^2 = K$. Опреди ги полуоските и координатите на допирната точка D .
- Напиши ги равенките на тангентите повлечени од точката P до елипсата E , ако се:
 - $P(5, 5)$ и $E: x^2 + 9y^2 = 225$; б) $P(-4, 0)$ и $E: 3x^2 + 3y^2 = 12$.
- Состави равенка на елипсо, која ги допира правите $l_1: x + 4y - 25 = 0$ и $l_2: 4x + 9y - 75 = 0$.
- Опреди ја равенката на тангентата на елипсата $E: x^2 + 4y^2 = 10$, која е паралелна со правата $l: 3x + 2y + 7 = 0$.
- Опреди ја равенката на тангентата на елипсата $E: 3x^2 + 4y^2 = 120$, која е нормална на правата $l: 2x - y + 7 = 0$.

4.3.6. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА И НОРМАЛА ВО ТОЧКА ОД ЕЛИПСАТА

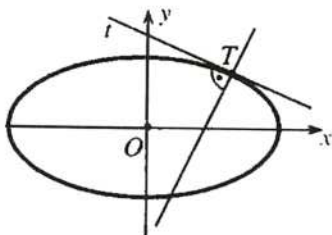
Нека се дадени елипсата E со равенката

$$E: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

и точката $T(x_1, y_1)$ од елипсата. Треба да ја определиме равенката на тангентата t на елипсата во точката T (црт.1).

Нека равенката на правата t е зададена во експлицитен вид

$$t: y = kx + n. \quad (1)$$



црт.1

Коефициентите k и n ќе ги определиме од условот правата и елипсата да имаат една заедничка (допирна) точка, односно системот равенки

$$\begin{cases} y = kx + n \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases} \quad (2)$$

да има едно единствено решение.

Ако y од првата равенка го замениме во втората, по средување ја добиваме равенката

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2knx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

чиј решенија се

$$x_{1,2} = \frac{-a^2kn \pm ab\sqrt{a^2k^2 + b^2 - n^2}}{a^2k^2 + b^2}, \quad (3)$$

кои кога ќе ги замениме во равенката $y = kx + n$, добиваме

$$y_{1,2} = \frac{b^2n \pm abk\sqrt{a^2k^2 + b^2 - n^2}}{a^2k^2 + b^2}. \quad (4)$$

Од условот, правата е тангента на елипсата, имаме

$$D = a^2k^2 + b^2 - n^2 = 0 \quad \text{т.е.} \quad a^2k^2 + b^2 = n^2 \quad (5)$$

Од (3) и (4), поради (5), координатите на допирната точка се $x_1 = -\frac{kan}{n}$, $y_1 = \frac{b^2}{n}$, од каде

$$k = -\frac{x_1n}{a^2}, \quad n = \frac{b^2}{y_1}, \quad \text{односно}$$

$$k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}, \quad n = \frac{b^2}{y_1}. \quad (6)$$

Ако најдените вредности за k и n ги замениме во (1) добиваме:

$$y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x + \frac{b^2}{y_1}, \quad (7)$$

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2, \quad (8)$$

или

$$\boxed{\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1} \quad (9)$$

Равенката (7) е равенка на тангентата на елипсата во експлицитен вид, равенката (8) е равенка на тангентата во општи вид, а (9) е нејзиниот сегментиран вид.

Нормала на елипсата во точката $T(x_1, y_1)$ е правата што е нормална на тангентата на елипсата во точката T , па нејзината равенка е:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1) \quad (10)$$

► **Пример 1.** Да најдешме равенка на тангентата t во точката $T(8,3)$ од елипсата $E: x^2 + 4y^2 = 100$.

Решение. Од равенката на елипсата имаме $a^2 = 100$, $b^2 = 25$, а координатите на допирната точка се $x_1 = 8$, $y_1 = 3$. Ако овие вредности ги замениме во (6) добиваме: $25 \cdot 8x + 100 \cdot 3y = 100 \cdot 25$, односно $t: 2x + 3y - 25 = 0$ ■

► **Пример 2.** Да ги најдешме равенките на тангентата и нормалата во точката $T(2, y < 0)$ од елипсата $(E): 2x^2 + 8y^2 = 16$.

Решение. Бидејќи $T \in E \Rightarrow 2 \cdot 2^2 + 8y^2 = 16$, од каде $y = \pm 1$. Од условот $y < 0$ следува дека допирната точка е $T(2, -1)$. Тогаш равенката на тангентата е: $t: x - 2y - 4 = 0$.

Нормалата на елипсата во точката T има равенка $n: y + 1 = -2(x - 2)$, односно $2x + y - 3 = 0$. (Како е добиен коефициентот k на нормалата?) ■

► **Пример 3.** Да ги најдешме равенките на тангентите на елипсата $E: 2x^2 + 3y^2 = 120$, кои од координатните оски отсекуваат еднакви отсечки.

Решение. Правата која отсекува еднакви отсечки на координатните оски има равенка: $\frac{x}{m} + \frac{y}{m} = 1$, односно $x + y - m = 0$, од каде добиваме дека коефициентот на правецот е $k = -1$, а отсечокот на y -оската е $n = m$. Од равенката на елипсата добиваме $a^2 = 60$ и $b^2 = 40$. Ако најдените големина ги замениме во условот за допир на права и елипса ($a^2 k^2 + b^2 = n^2$), добиваме

$$60 \cdot (-1)^2 + 40 = m^2, \quad m = \pm 10.$$

Значи имаме две тангенти кои го задоволуваат условот на задачата. Нивните равенки се:

$$t_1: x + y - 10 = 0 \quad \text{и} \quad t_2: x + y + 10 = 0 \quad \blacksquare$$

► **Пример 4.** Да составиме равенки на тангентите во пресечните точки на правата $t: x + 2y - 7 = 0$ и елипсата $E: x^2 + 4y^2 = 25$.

Решение. Координатите на пресечните точки се решенија на системот равенки

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x^2 + 4y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 2y \\ (7 - 2y)^2 + 4y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 4 \\ y_1 = 2, y_2 = \frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Значи, пресечните точки се}$$

$M_1(3, 2)$ и $M_2(4, \frac{3}{2})$, па равенките на тангентите се $t_1: 3x + 8y - 25 = 0$ и $t_2: 4x + 6y - 25 = 0$ ■

ЗАДАЧИ

1. Напиши ја равенката на тангентата t на елипсата E во нејзината допирна точка, ако:
а) $E: \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$ и $T(4,3)$; б) $E: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ и $T(3, y < 0)$; в) $E: 16x^2 + 25y^2 = 400$ и $T(-4, y > 0)$
2. Состави ги равенките на тангентата и нормалата во дадена точка на елипсата, ако е:
а) $E: x^2 + 4y^2 = 20$ и $T(4, y < 0)$; б) $E: 4x^2 + 25y^2 = 400$ и $T(x < 0, \frac{8}{5})$;
в) $E: 3x^2 + 4y^2 = 28$ и $T(2,3)$.
3. Во која точка на елипсата $E: 3x^2 + 4y^2 = 12$, минува нормала низ фокусот на дадената елипса?
4. Определи ја вредноста на коефициентот k на правата $y = kx + 2$, за таа да биде нормала на елипсата $E: x^2 + 4y^2 = 4$.
5. Колку треба да биде n за правата $y = \frac{1}{2}x + n$ да биде нормала на елипсата $E: 2x^2 + y^2 = 3$?
6. Дали правата $l: 2x - y - 1 = 0$ е нормала на елипсата $E: 3x^2 + 4y^2 = 48$?
7. Напиши ја равенката на елипсата, ако е дадена големата полуоска $a = 6$ и тангентата $t: x + y - 9 = 0$.
8. Напиши равенка на елипса ако е дадена малата полуоска b и тангентата t :
а) $b = 2$, $t: 3x + 10y - 25 = 0$; б) $b = 10$, $t: x + 2y - 25 = 0$.
9. Напиши равенка на елипса, ако е даден полупараметарот p и тангентата t :
а) $p = \frac{3}{2}$, $t: x + 4y - 16 = 0$; б) $p = \frac{16}{5}$, $t: 3x + 5y - 25 = 0$.
10. Дадена е равенката на правата $l: x - 6y + 10 = 0$, што ја пресекува елипсата $E: x^2 + 4y^2 = 100$.
Определи ја пресечната точка на тангентите повлечени во пресекот на правата l и елипсата E .

4.3.7. ХИПЕРБОЛА. РАВЕНКА НА ХИПЕРБОЛА

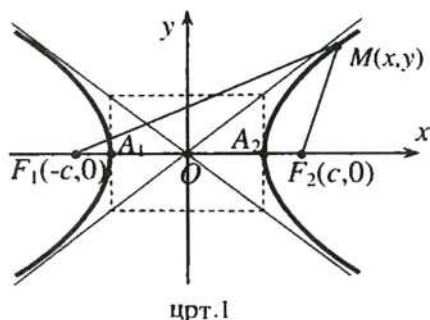
За разлика од кружницата и елипсата, во досегашното изучување на математиката хиперболата како крива од втор ред е споменувана многу малку. Но, тоа не значи дека таа е од помала практична важност. Изучувањето на хиперболата е особено значајно за астрономијата, радио навигациските системи, и др. Геометриската дефиниција за хиперболата е следната.

Дефиниција. Нека F_1 и F_2 се две фиксни точки во рамнината $хоу$ и нека $F_1F_2 = 2c$. **Хипербола** е множеството од сите точки $M(x,y)$ во рамнината $хоу$ такви што айсолутијата големина на разликата од растојанијата од M до F_1 и F_2 е константна и еднаква на $2a$ ($a < c$).

Значи, хипербола е множеството

$$H = \{M(x, y) \in \text{рамнина } хоу \mid |MF_1 - MF_2| = 2a\}$$

Точките F_1 и F_2 се викаат **фокуси на хиперболата**, а растојанието меѓу фокусите $\overline{F_1F_2}$ се вика **фокусно растојание**. Средишната точка O за отсечката F_1F_2 се вика **центар на хиперболата**.



Аналогно како кај елипсата, за да ја одредиме равенката на хиперболата, координатниот систем xOy го избираме така што фокусите да лежат на x -оската, y -оската е симетрала на фокусното растојание F_1F_2 , а координатниот почеток е во центарот O на хиперболата (црт.1). Тогаш фокусите имаат координати $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Точките A_1 и A_2 во кои хиперболата ја сече x -оската, се **темиња** на хиперболата.

Ќе покажеме дека растојанието $\overline{A_1A_2} = 2a$. Навистина, според дефиницијата, за произволната точка M од едната гранка на хиперболата, на пример од десната, разликата $\overline{MF_1} - \overline{MF_2}$ има константна вредност $2a$. Но, тоа треба да важи и кога наместо M ќе ја земеме точката A_2 , а тогаш имаме:

$$\overline{A_2F_1} - \overline{A_2F_2} = \overline{A_2F_1} - \overline{A_1F_1} = \overline{A_1A_2} = 2a.$$

Следува координатите на темињата се $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$.

Растојанијата $\overline{MF_1} = r_1$ и $\overline{MF_2} = r_2$ ги викаме **фокусни радиуси** за точката M . Од дефиницијата на хиперболата имаме:

$$|\overline{MF_1} - \overline{MF_2}| = 2a \text{ т.е. } |r_1 - r_2| = 2a \quad (a > 0) \quad (1)$$

но, за страните на триаголникот F_1F_2M важи неравенството $|r_1 - r_2| < 2c$, па следува $2a < 2c$ т.е. $a < c$. Сега, согласно со формулата за растојание меѓу две точки, од релацијата (1) ја добиваме равенката

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a. \quad (2)$$

Равенката (2) претставува равенка на хипербола. Но, обликот (2) не е погоден за практична примена, па затоа равенката (2) ќе ја трансформираме до поедноставен облик.

Најнапред, равенката (2) ја запишуваме во вид:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

односно

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

По квадрирање на двете страни и по средување добиваме

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Со повторно квадрирање и средување ја добиваме равенката

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Бидејќи $c > a$ следува $c^2 - a^2 > 0$, па ставајќи $c^2 - a^2 = b^2$ последната равенка го добива видот:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (3)$$

или

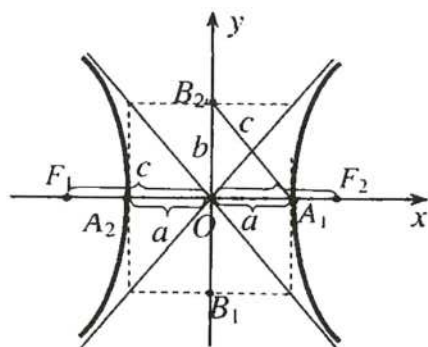
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

Равенката (3) односно (4) ја викаме **канонична** (централна) равенка на хипербола.

Бидејќи во равенката (3) и двете променливи x и y се јавуваат само на парен степен (квадрат), следува дека хиперболата H е симетрична во однос и на координатните оски и на координатниот почеток. Имено, ако $M(x, y) \in H$, следува дека и точките $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$ и $M_3(-x, -y)$ исто така припаѓаат на хиперболата.

На пример, точката $M(3\sqrt{2}, 2)$, лежи на хиперболата $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, бидејќи

$\frac{(3\sqrt{2})^2}{9} - \frac{2^2}{4} = \frac{18}{9} - \frac{4}{4} = 2 - 1 = 1$, но и точките $M_1(-3\sqrt{2}, 2)$, $M_2(3\sqrt{2}, -2)$ и $M_3(-3\sqrt{2}, -2)$ исто така лежат на хиперболата (провери).



црт.2

$A_2(a, 0)$, **темињата** на хиперболата. Должината $\overline{A_1A_2} = 2a$ ја викаме **реална оска**, а должината $\overline{B_1B_2} = 2b$, каде $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ и $b^2 = c^2 - a^2$, ја викаме **имагинарна оска** (бидејќи таа не содржи точки од хиперболата) (црт.2).

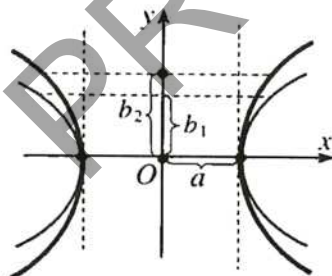
Забелешка. Количникот од фокусното растојание $\overline{F_1F_2} = 2c$ и должината на реалната полуоска се вика нумерички (броен) ексцентрицитет, т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \quad (6)$$

Бидејќи за хиперболата имаме $c > a$, следува $\varepsilon > 1$. Исто така, бидејќи $c^2 = a^2 + b^2$, т.е. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, важи

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}. \quad (7)$$

Нумеричкиот ексцентрицитет ε за хиперболата ја определува "отвореноста" на гранките на хиперболата. Имено, ако при фиксирана полуоска a се зголемува ексцентрицитетот,



црт.3

тогаш се зголемува односот $\frac{b}{a}$ (односно b), а со тоа се зголемува отвореноста на хиперболата (црт.3).

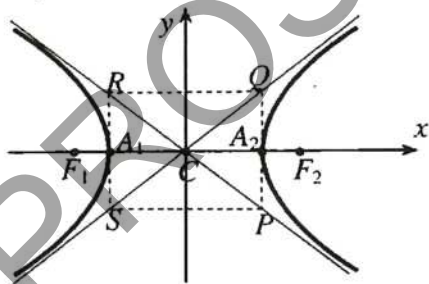
➤ **Пример 1.** Дадени се реалнаа полуоска $a = 4$ и имагинарнаа полуоска $b = 3$. Да ја најдеме равенката на хиперболатата, координатите на фокусите и бројниот ексцентрицитет.

Решение. Равенката на хиперболата ќе биде $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ или $9x^2 - 16y^2 = 144$,
 $c = \pm\sqrt{16+9} = \pm 5$, па фокусите се $F_1(-5,0)$ и $F_2(5,0)$, а нумеричкиот ексцентрицитет $e = \frac{5}{4}$ ■

Хиперболата има уште едно својство, кое досега изучените криви од втор ред го немаат. Имено, кога апсцисите на точките на хиперболата неограничено растат по апсолутна вредност соодветните ординати се доближуваат до ординатите на правите $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$, а тоа се правите што ги содржат дијагоналите на паралелограмот $PQRS$ со страни $2a$ и $2b$ (црт. 4). Значи, ако точката $M(x, y)$ се движи по хиперболата стремејќи се кон бесконечност, тогаш таа се доближува до една од правите $y = -\frac{b}{a}x$ или $y = \frac{b}{a}x$. Правите кои го имаат ова својство се викаат **асимптоти** на хиперболата. Следува, правите $y = -\frac{b}{a}x$ и $y = \frac{b}{a}x$ се асимптоти за хиперболата зададена со равенката

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

➤ **Пример 2.** Дадена е хиперболатата $4x^2 - 9y^2 = 36$. Да ѝ ја определиме полуоските, координатите на фокусите и равенките на асимптотите, а потоа да ја нацртаме хиперболатата.



црт.4

Решение. Ја запишуваме хиперболата во каноничен вид $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, од каде ги определуваме полуоските $a = 3$, $b = 2$, и $c = \pm\sqrt{9+4} = \pm\sqrt{13}$, па фокусите се $F_1(-\sqrt{13},0)$ и $F_2(\sqrt{13},0)$. Равенките на асимптотите се $y = \frac{2}{3}x$ и $y = -\frac{2}{3}x$ (црт. 4) ■

➤ **Пример 3:** Дадена е хипербола со равенката $H: x^2 - 4y^2 = 12$. Да ја определиме должината на тетивата што минува низ еден од фокусите на хиперболатата и е паралелна со y -оската.

Решение. Аналогно како кај елипсата и овде должината на бараната тетива се нарекува **параметар** на хиперболата H , кој се означува со $2p$ и за него важи $2p = \frac{2b^2}{a}$,

додека $p = \frac{b^2}{a}$ се вика **полупараметар** на хиперболата H (направи цртеж и докажи дека

$p = \frac{b^2}{a}$). Од равенката на хиперболата $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ имаме $a^2 = 12$, $b^2 = 3$, па добиваме

$$p = \frac{3}{2\sqrt{3}}, \text{ или } p = \frac{\sqrt{3}}{2} \blacksquare$$

➤ **Пример 4.** Да најдешме равенка на хиперболата H , ако се дадени равенките на нејзините асимптоти $y = \pm \frac{4}{3}x$ и фокусното растојание $2c = 20$.

Решение. Бидејќи $2c = 20 \Rightarrow c = 10$, а $a^2 + b^2 = 100$. Потоа од равенките на асимптотите $y = \pm \frac{4}{3}x$ имаме $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$. Од системот равенки $\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ 3b = 4a \end{cases}$ добиваме

$$a^2 = 36, b^2 = 64. \text{ Следува, равенката на хиперболата е } \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1 \blacksquare$$

➤ **Пример 5.** Да ја најдешме равенката на хиперболата што минува низ точките $M_1(2,1)$ и $M_2(10,7)$.

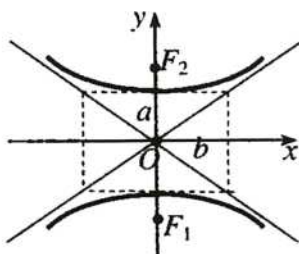
Решение. Од условот дека точките M_1 и M_2 припаѓаат на хиперболата следува дека нивните координати ја задоволуваат равенката на хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, т.е. го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} 4b^2 - a^2 = a^2b^2 \\ 100b^2 - 49a^2 = a^2b^2 \end{cases}, \text{ чије решение е } a^2 = 2, b^2 = 1, \text{ па равенката на хиперболата е } x^2 - 2y^2 = 2 \blacksquare$$

➤ **Пример 6.** Да ја определиме равенката на рамнострана хипербола што минува низ точката $M(3,-1)$.

Решение. Рамнострана хипербола е онаа хипербола за која реалната и имагинарната оска се еднакви меѓу себе т.е. $2a = 2b$. Значи нејзината равенка е $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Бидејќи

$$M \in H \Rightarrow \frac{9}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 8, \text{ па равенката на хиперболата } H \text{ ќе биде: } \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1 \text{ или } x^2 - y^2 = 8 \blacksquare$$



црт.5

Забелешка. Ако фокусите на хиперболоата се на y -оската, т.е. во точките $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, реалната полуоска е a , а имагинарната оска е b , тогаш равенката на хиперболоата гласи

$$a^2x^2 - b^2y^2 = -a^2b^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1.$$

Во овој случај асимптоти се правите: $y = \pm \frac{a}{b}x$, а ексцентрицитетот повторно е $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Графикот е како на црт.5.

ЗАДАЧИ

1. Напиши равенка на хипербола H , ако се дадени:
 - а) реалната полуоска $a = 6$ и имагинарната полуоска $b = 4$;
 - б) фокусното растојание 10, а имагинарната полуоска $b = 3$;
 - в) Реалната полуоска е 8, а бројниот ексцентрицитет $\varepsilon = \frac{5}{4}$.
2. Определи ги должините на полуоските, координатите на фокусите и равенките на асимптотите на хиперболоата H , ако е: а) $H : 16x^2 - 9y^2 = 144$; б) $H : x^2 - 16y^2 = 16$.
3. Напиши равенка на хипербола H , која минува низ точките $M_1(6, -1)$ и $M_2(-3, 2\sqrt{2})$.
4. Каков знак има триномот $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2$ за множеството точки:
 - а) меѓу двете гранки на хиперболоата; б) во внатрешноста на една од гранките на хиперболоата?
5. Како гласи равенката на хиперболоата H , ако нејзините фокуси се на y -оската, а фокусното растојание е 100, додека реалната оска на хиперболоата е 64?
6. Состави равенка на рамностран хипербола, ако фокусното растојание е 32.
7. Испитај ја положбата на точката M во однос на хиперболоата H , ако е:
 - а) $M(-3, 0)$ и $H : 7x^2 - 9y^2 = 63$; б) $M(6, -2)$ и $H : 11x^2 - 25y^2 = 275$;
 - в) $M(2, 4)$ и $H : 16x^2 - 5y^2 = 19$.
8. Напиши ја централната равенка на хиперболоата H , ако:
 - а) $c = 2\sqrt{3}$ и аголот меѓу асимптотите $\varphi = 60^\circ$; б) $c = 4\sqrt{3}$ и $\varphi = 120^\circ$.
9. Напиши ја равенката на хиперболоата H , ако $c = 2$, а фокусите и се совпаѓаат со фокусите на елипсата $E : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (тие се конфокални).
10. Состави равенка на хипербола H , ако се дадени асимптотите и фокусот $F_2(c, 0)$:
 - а) $y = \pm \frac{3}{4}x$, $c = 5$; б) $y = \pm \frac{5}{12}x$, $c = 13$.
11. Определи ги пресечните точки на правата l и хиперболоата H , ако се :
 - а) $l : 4x - 3y + 36 = 0$ и $H : 36x^2 - 81y^2 = 2916$; б) $l : 2x - y - 10 = 0$ и $H : x^2 - 4y^2 = 20$.

4.3.8. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И ХИПЕРБОЛА

Аналогно како кај елипсата, меѓусебната положба на правата $l: y = kx + n$ и хиперболатата $H: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ќе ја одредиме со дискусија на решенијата на системот равенки

$$\begin{cases} y = kx + n \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases} \quad (1)$$

По замена на y од првата равенка во равенката на хиперболатата и по средување, се добива квадратната равенка

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2knx - a^2(b^2 + n^2) = 0 \quad (2)$$

чија дискриминанта е $D = 4a^2b^2(b^2 + n^2 - a^2k^2)$.

I. Нека $b^2 - a^2k^2 \neq 0$. Решенијата на квадратната равенка, а согласно со тоа и решенијата на системот (1) зависат од тоа каква е вредноста на соодветната дискриминанта, т.е. дали $D > 0$, $D = 0$ или $D < 0$.

Бидејќи $4a^2b^2 > 0$, знакот на D , а со тоа решенијата на системот (1) и заемната положба на правата и хиперболатата зависат од знакот на изразот

$$b^2 + n^2 - a^2k^2 \quad (3)$$

и притоа имаме:

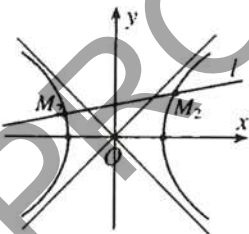
1^o ако $D > 0$, т.е. $a^2k^2 - b^2 < n^2$, правата l ја сече хиперболатата во две точки, т.е. $l \cap H = \{M_1, M_2\}$ (црт.1);

2^o ако $D = 0$ т.е. $a^2k^2 - b^2 = n^2$, правата l и хиперболатата имаат една заедничка точка, т.е. $l \cap H = \{T\}$ (црт.2), па релацијата

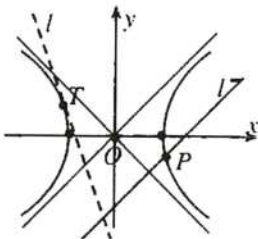
$$a^2k^2 - b^2 = n^2 \quad (4)$$

е и услов за допир на правата $l: y = kx + n$ и хиперболатата $H: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$;

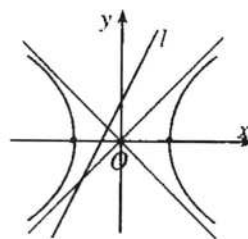
3^o ако $D < 0$, т.е. $a^2k^2 - b^2 > n^2$, правата l и хиперболатата H немаат заедничка точка, т.е. $l \cap H = \emptyset$ (црт.3).



црт.1



црт.2



црт.3

II. Ако $b^2 - a^2 k^2 = 0$, равенката (2) е линеарна и има единствено решение, па правата и хиперболатата имаат една заедничка точка, а тоа е случајот кога $k = \pm \frac{b}{a}$, т.е. кога правата l е паралелна со една од асимптотите (црт.2)

➤ **Пример 1.** Да ја определиме заемната положба на правата $l: 2x + y - 1 = 0$ и хиперболатата $H: 3x^2 - y^2 = 3$. ■

Решение. Од равенката на правата l имаме $k = -2$ и $n = 1$, а од равенката на хиперболатата H е $a^2 = 1$ и $b^2 = 3$. Ако овие вредности ги замениме во изразот (3), добиваме: $3 + 1 - 1 \cdot (-2)^2 = 0$, од каде следува $D = 0$, што значи правата l ја допира хиперболатата H . Допирната точка ја наоѓаме решавајќи го системот равенки

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases}, \text{ чие решение е } x_1 = x_2 = 2 \text{ и } y_1 = y_2 = -3.$$

Следува, допирната точка е $T(2, -3)$, а дадената права l е тангентата на хиперболатата H . ■

➤ **Пример 2.** Да ја определиме заемната положба на правата $l: 2x - y - 10 = 0$ и хиперболатата $H: x^2 - 4y^2 = 20$.

Решение. Тука $k = 2$, $n = -10$ и $a^2 = 20$, $b^2 = 5$. Ако овие вредности ги замениме во равенството (3) добиваме $5 + 100 - 20 \cdot 4 = 25 > 0$ т.е. $D > 0$, што значи правата и хиперболатата се сечат. Со решавање на системот равенки

$$\begin{cases} 2x - y - 10 = 0 \\ x^2 - 4y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 10 \\ 3x^2 - 32x + 84 = 0 \end{cases}$$

добиваме $M_1(6, 2)$, $M_2(3, -\frac{2}{3})$. ■

➤ **Пример 3.** За која вредност на коефициентот k правата $l: y = kx - \frac{9}{2}$ ја допира хиперболатата $H: 4x^2 - y^2 = 36$?

Решение. Од условот за допир на права и хипербола: $a^2 k^2 - b^2 = n^2$, добиваме $9k^2 - 36 = \frac{81}{4}$, од каде $k = \pm \frac{5}{2}$. Значи, при дадениот услов постојат две прави: $y = \pm \frac{5}{2}x - \frac{9}{2}$, кои се тангенти на дадената хипербола. ■

➤ **Пример 4.** На хиперболатата $H: x^2 - 6y^2 = 6$, да се повлече тангентата која со позитивната насока на x -оската зафаќа агол од 150° .

Решение. Од условот на задачата следува дека тангентата е $y = x \cdot \operatorname{tg} 150^\circ + n$, т.е. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + n$. Значи, треба да ја определиме n . Од равенката на хиперболатата имаме $a^2 = 6$, $b^2 = 1$, па од условот за допир $a^2 k^2 - b^2 = n^2$ добиваме $n = \pm 1$. Следува, равенките на тангентите се $y = -x \frac{\sqrt{3}}{3} \pm 1$. ■

► **Пример 5.** Од точката $P(5,9)$ се конструираат тангентите на хиперболатата $H: 3x^2 - y^2 = 3$. Да ги најдеме нивните равенки.

Решение. Аналогно како кај кружницата и елипсата и тука од една точка што не лежи на кривата, може да се повлечат две тангенти. Лесно се проверува дека $P \notin H$ (провери). Нека равенката на тангентата е $t: y = kx + n$. Од условот за допир на правата и хиперболатата и условот $P \in t$, го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 5k + n = 9 \\ k^2 - n^2 = 3 \end{cases}, \text{ од каде ги наоѓаме параметрите } k \text{ и } n: k_1 = 2, k_2 = \frac{7}{4}, n_1 = -1 \text{ и } n_2 = \frac{1}{4}.$$

Следува, равенките на тангентите се $t_1: 2x - y - 1 = 0$ и $t_2: 7x - 4y + 1 = 0$. ■

► **Пример 6.** Да составиме равенка на хипербола што ја допира правите $l_1: 2x - y - 1 = 0$ и $l_2: 7x - 4y - 1 = 0$.

Решение. Користејќи го условот за допир на хиперболатата со правите l_1 и l_2 го добиваме системот равенки: $\begin{cases} 4a^2 - b^2 = 1 \\ \frac{49}{16}a^2 - b^2 = \frac{1}{16} \end{cases}$, од каде добиваме $a^2 = 1$ и $b^2 = 3$, па тогаш равенката на хиперболатата е $H: 3x^2 - y^2 = 3$. ■

ЗАДАЧИ

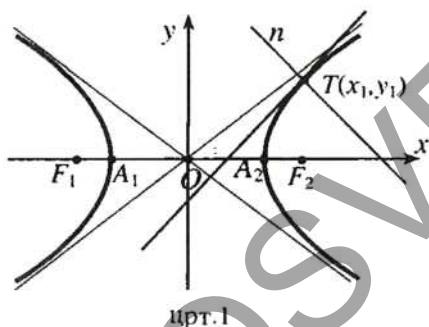
- Опреди ја заемната положба на правата l и хиперболатата H :
 - $l: 2x - y + 3 = 0$ и $H: x^2 - 4y^2 = 4$;
 - $l: 4x - y + 1 = 0$ и $H: 16x^2 - 5y^2 = 80$;
 - $l: 4x - 3y + 36 = 0$ и $H: 36x^2 - 81y^2 = 2916$;
 - $l: 5x - 3y + 32 = 0$ и $H: x^2 - y^2 = 64$.
- Опреди ги допирните точки на правата l и хиперболатата H :
 - $l: 5x - 6y - 9 = 0$ и $H: 4x^2 - 9y^2 = 36$;
 - $l: 8x - 3y = 7$ и $H: 4x^2 - y^2 = 7$;
 - $l: 4x^2 - 3y^2 - 7 = 0$ и $H: x^2 - y^2 = 7$;
 - $l: 5x - 6y - 32 = 0$ и $H: x^2 - 4y^2 = 63$.
- Опреди ги пресечните точки на правата (l) и хиперболатата H :
 - $l: 2x - y + 4 = 0$ и $H: x^2 - y^2 = 4$;
 - $l: 24x + 35y + 60 = 0$ и $H: 9x^2 - 25y^2 = 225$.
- Опреди за која вредност на параметарот m правата $l: y = \frac{5}{2}x + m$:
 - ја сече;
 - ја допира;
 - нема заедничка точка со хиперболатата $H: 4x^2 - y^2 = 36$.
- Од точката $P(2,1)$ повлечени се тангенти на хиперболатата $H: 8x^2 - 9y^2 = 72$. Состави ги нивните равенки.
- Дадена е хиперболатата $H: 5x^2 - 4y^2 = 20$. Состави ја равенката на тангентата која е паралелна со правата $l: 3x - 2y = 0$.
- Состави равенка на тангента на хиперболатата $H: 7x^2 - 2y^2 = 14$, која е нормална на правата $l: x + 2y - 3 = 0$.

8. Состави равенка на хипербола H , која ја допира правата $l: x - y + 1 = 0$ и минува низ точката $M(3,0)$ ($M \in H$).
9. Во равенката на правата $l: (m+1)x - 6y - 4m = 0$, определи го параметарот m така што правата l е тангента на хиперболоата $H: x^2 - 4y^2 = 16$.
10. Во равенката на хиперболоата $H: x^2 - my^2 = 2m$, определи го параметарот m така што правата $l: 3x - 4y + 2 = 0$ е тангента на хиперболоата.

4.3.9. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА И НОРМАЛА ВО ТОЧКА ОД ХИПЕРБОЛАТА

Во претходната точка го добивме условот за допир на права и хипербола. Сега сакаме да ја запишеме равенката на тангентата на хиперболоата повлечена во допирната точка. Значи, ако претпоставиме дека тангентата има равенка $(t): y = kx + n$, треба да ги определиме k и n од условот правата (t) да ја допира хиперболоата. Притоа, јасно е дека за хиперболоата со равенка $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, коефициентот на тангентата $k \neq \pm \frac{b}{a}$ (зошто?).

Нека допирната точка на правата и хиперболоата е $T(x_1, y_1)$. Со постапка аналогна со онаа што ја спроведовме кај елипсата, добиваме:



$$k = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \quad n = -\frac{b^2}{y_1} \quad (1)$$

па равенката на тангентата запишана во експлицитен вид е

$$t: y = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x - \frac{b^2}{y_1} \quad (2)$$

Од овде, општиот вид на равенката е

$$t: b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = a^2 b^2 \quad (3)$$

а сегментниот вид е

$$t: \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad (4)$$

Ползувајќи го експлицитниот вид (2) на равенката на тангентата, веднаш можеме да ја запишеме и **равенката на нормалата на хиперболоата** во точката $T(x_1, y_1) \in H$. Таа гласи

$$(n): y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1) \quad (5)$$

➤ **Пример 1.** Да ја најдеме равенката на тангентата t која ја допира хиперболатата $H: 4x^2 - 5y^2 = 20$ во точката $T(5, -4)$.

Решение. Од равенката на хиперболатата имаме $a^2 = 5$, $b^2 = 4$, а дадени се и координатите на допирната точка $x_1 = 5$ и $y_1 = -4$. Со замена во равенството (3), ја добиваме равенката на тангентата: $20x + 20y = 20$ или $x + y - 1 = 0$ ■

➤ **Пример 2.** Да ја најдеме равенката на тангентата t и нормалата n на хиперболатата $H: 3x^2 - 4y^2 = 12$ во точката $T(4, y < 0)$ од хиперболатата.

Решение. Од условот $T \in H$ следува дека координатите на T ја задоволуваат равенката на хиперболатата, т.е. $3 \cdot 4^2 - 4y^2 = 12 \Leftrightarrow 4y^2 = 36 \Leftrightarrow y_{1,2} = \pm 3$. Значи допирната точка е $T(4, -3)$, па со директна замена во (3) ја наоѓаме равенката на тангентата

$$t: 3 \cdot 4x + 4 \cdot 3y = 12 \text{ или } x + y - 1 = 0,$$

а во (5) равенката на нормалата е: $n: y + 3 = 1(x - 4)$ или $n: x - y - 7 = 0$. ■

➤ **Пример 3.** Во пресечните точки на правата $l: x + 2y - 10 = 0$ и хиперболатата $H: 3x^2 - 4y^2 = 12$, се повлечени тангенти на хиперболатата. Да го определиме аголот што го зафаќаат тангентите.

Решение. Со решавање на системот равенки $\begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ 3x^2 - 4y^2 = 12 \end{cases}$ ги добиваме пресечните точки $T_1(-14, 12)$ и $T_2(4, 3)$. Согласно со (3) равенките на двете тангенти се:

$$\begin{aligned} t_1: 3 \cdot (-14)x - 4 \cdot 12y &= 12 & \text{или} & & t_1: 7x + 8y + 2 &= 0 \\ t_2: 3 \cdot 4x - 4 \cdot 3y &= 12 & \text{или} & & t_2: x - y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Коефициентите на правецот за тангентите се $k_1 = -\frac{7}{8}$, $k_2 = 1$, па од формулата за агол меѓу

две прави добиваме: $\tan \varphi = \frac{1 + \frac{7}{8}}{1 - \frac{7}{8}} = 15 \Rightarrow \varphi = \arctg 15$. ■

➤ **Пример 4.** Во точката P на хиперболатата $H: 9x^2 - 16y^2 = 144$ во првиот квадрант, чија ордината е еднаква на полуапсисата p на хиперболатата, е повлечена тангентата на хиперболатата. Да ја најдеме равенката на тангентата.

Решение. Според условот на задачата, допирната точка е $P(c, p)$, чија апсциса се совпаѓа со апсцисата на фокусот на десната гранка на хиперболатата и ја определуваме од условот: $c^2 = a^2 + b^2$. Од равенката на хиперболатата имаме $a^2 = 16$, $a = 4$ и $b^2 = 9$, па $c = \sqrt{16 + 9} = 5$, $p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}$. Значи, допирната точка е $P(5, \frac{9}{4})$, па равенката на тангентата е $t: 5x - 4y - 16 = 0$ ■

ЗАДАЧИ

1. Напиши равенка на тангента во точката T од хиперболоата H , ако е:
а) $H: 4x^2 - 5y^2 = 20$ и $T(5, -4)$; б) $H: 3x^2 - y^2 = 3$ и $T(7, -12)$; в) $H: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ и $T(-4, 3)$.
2. Најди ги равенките на тангентите на хиперболоата $H: 6x^2 - 10y^2 = 60$ во пресечните точки со правата $l: 3x - 5y = 0$.
3. Во точката $T(-10, y > 0)$ на хиперболоата $H: \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$ е повлечена тангента. Состави ја равенката на тангентата.
4. Правата $l: 5x - 4y - 16 = 0$ ја допира хиперболоата во точката $T(5, y)$. Најди ја равенката на хиперболоата.
5. Напиши равенка на тангента и равенка на нормала во точката $T(10, 3)$ на хиперболоата $H: x^2 - 4y^2 = 64$.
6. Ако правата $l: 9x - 4y - 11 = 0$ е тангента на хиперболоата $H: 3x^2 - y^2 = 11$, најди ја равенката на нормалата во допирната точка.
7. Во пресечните точки на правата $l: x + y - 5 = 0$ и хиперболоата $H: 25x^2 - 40y^2 = 1000$, се повлечени тангенти. Најди ги координатите на пресечната точка на тангентите.
8. Најди равенка на хипербола, ако се знаат нејзините асимптоти $y = \pm \frac{1}{2}x$ и равенката на една од нејзините тангенти $l: 5x - 6y - 8 = 0$.
9. На хиперболоата $H: 9x^2 - 8y^2 = 72$, определи точка во која тангентата со позитивната насока на x -оската зафаќа агол од 60° .

4.3.10. ПАРАБОЛА. РАВЕНКА НА ПАРАБОЛА

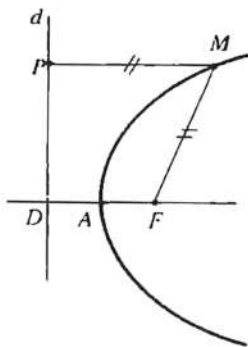
Кривата парабола добро ти е позната од втора година. Како што знаеш, таа е график на квадратна функција. Тука, во аналитичката геометрија, ќе дадеме геометрирска дефиниција на параболата и врз основа на таа дефиниција, ќе ја изведеме нејзината равенка.

Дефиниција. Парабола е множеството од сите точки $M(x, y)$ во рамнината кои се на еднакво растојание од дадена права d и од дадена точка F , такава што $F \notin d$.

Значи, парабола е множеството $\Pi = \{M(x, y) | \overline{MF} = \overline{MP}\}$, каде што
точката P е ортогонална проекција на точката M врз правата d .

Правата d се вика **директриса** на параболата, а точката F се вика **фокус** на параболата.

Растојанието p од фокусот F до директрисата d се вика **параметар** на параболата (црт.1). Нека D е пресечната точка на нормалата повлечена од точката F до правата d . Тогаш, согласно со горната дефиниција, за средишната точка A на отсечката DF важи:



црт.1

$\overline{AD} = \overline{AF}$, па следува дека A е точка од параболата. Оваа точка ја викаме **теме** на параболата (црт.1).

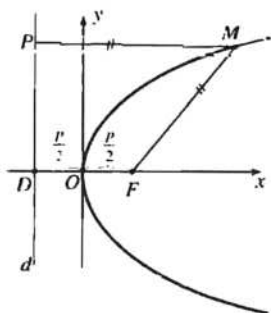
За да ја најдеме равенката на параболата со параметар p во што е можно поедноставен вид, координатниот систем во рамнината го избираме така што x -оската да минува низ фокусот F и е нормална на директрисата d , а координатниот почеток O е во средишната точка A меѓу фокусот и директрисата (црт.2).

Тогаш, од дефиницијата на параболата имаме $\overline{OF} = \overline{OD} = \frac{p}{2}$, па

следува дека фокусот е во точката $F(\frac{p}{2}, 0)$, а равенката на

директрисата е $x = -\frac{p}{2}$.

Ако $M(x, y)$ е произволна точка од параболата, ортогоналната проекција на M врз



црт.2

директрисата е точката $P(-\frac{p}{2}, y)$, па од дефиницијата на параболата имаме

$$\overline{MP} = \overline{MF} \quad (1)$$

Користејќи ја формулата за растојание меѓу две точки добиваме

$$\overline{MF} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \overline{MP} = x + \frac{p}{2},$$

па равенството (1) во координатна форма гласи :

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2} \quad (2)$$

Од овде со квадрирање и средување ја добиваме равенката

$$y^2 = 2px \quad (3)$$

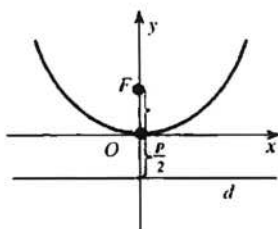
Равенката (3) се вика **канонична** или **темена** равенка на параболата, за која фокусот е на позитивниот дел од x -оската.

Ако пак фокусот на параболата е на негативниот дел на x -оската (црт.3), тогаш каноничната равенка на параболата ќе гласи

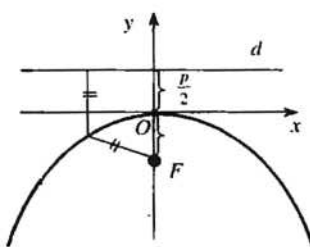
$$y^2 = -2px \quad (4)$$

Параболите $\Pi: y^2 = \pm 2px$ се симетрични во однос на x -оската бидејќи ако $M_1(x, y) \in \Pi$ тогаш и $M_2(x, -y) \in \Pi$, а точките M_1 и M_2 се симетрични во однос на x -оската. Следува x -оската е **оска на симетрија** за параболите $y^2 = \pm 2px$.

Ако го избереме координатниот систем така што фокусот F на параболата да лежи на y -оската, тогаш каноничната равенка на параболата ќе гласи :



црт.4



црт.5

$$x^2 = 2py \text{ или } y = \frac{x^2}{2p}$$

ако F лежи на позитивниот дел од y -оската (црт.4), и

$$x^2 = -2py \text{ или } y = -\frac{x^2}{2p}$$

ако F лежи на негативниот дел од y -оската (црт.5).

Оваа параболa веќе ти е позната од втора година.

➤ **Пример 1.** Да ги определиме координатите на фокусот, параметарот и равенката на директрисата на параболата $\Pi: y^2 = \frac{1}{2}x$.

Решение. Од равенката на параболата $\Pi: y^2 = 2px$, следува $2p = \frac{1}{2}$, т.е. $p = \frac{1}{4}$, па фокусот е $F(\frac{1}{8}, 0)$. Директрисата е права паралелна со y -оската, која минува низ точката $D(-\frac{1}{8}, 0)$, па затоа има равенка $x = -\frac{1}{8}$. ■

➤ **Пример 2.** Да составиме равенка на параболa, ако се знае нејзиниот параметар $p = 8$.

Решение. Со директна замена во равенката (2) добиваме дека $y^2 = 16x$. ■

➤ **Пример 3.** Да напишеме равенка на параболa, ако се знае нејзиниот фокус $F(9, 0)$.

Решение. Фокусот за параболата $y^2 = 2px$ има координати $x = \frac{p}{2}$, $y = 0$, а во нашиов случај $\frac{p}{2} = 9$ или $p = 18$, па равенката на параболата е $y^2 = 36x$. ■

➤ **Пример 4.** Да ја составиме равенката на параболата Π што минува низ точката $M(3, 2)$ чиј фокус е на x -оската.

Решение. Каноничната равенка на параболата е $y^2 = 2px$. Од условот дека точката M лежи на параболата Π , имаме: $2^2 = 2p \cdot 3$, $6p = 4$, т.е. $p = \frac{2}{3}$, па равенката на параболата ќе биде $y^2 = \frac{4}{3}x$. ■

► **Пример 5.** Да ја напишеме равенката на параболата што минува низ точката $M(-2, -3)$ чиј фокус е на x -оската.

Решение. Равенката на параболата е $y^2 = -2px$ (зошто?). Со замена на координатите на M во оваа равенка добиваме $9 = -2p(-2)$ т.е. $p = \frac{9}{4}$, па равенката на параболата ќе биде $y^2 = -\frac{9}{2}x$ ■

► **Пример 6.** Да составиме равенка на парабола, чија директриса е правата $2x + 5 = 0$.

Решение. Равенката на параболата е $y^2 = 2px$. Од равенката на директрисата $2x + 5 = 0$ т.е. $x = -\frac{5}{2}$ следува $p = 5$, па параболата ќе има равенка $y^2 = 10x$ ■

ЗАДАЧИ

- Состави равенка на парабола ако се знае дека: а) координатите на фокусот се $\frac{3}{2}$ и 0;
б) параболата минува низ точката $M(-1, 4)$ а фокусот е на x -оската.
- На параболата $y^2 = 8x$, најди ја точка M за која $\overline{MF} = 10$.
- Опреди го параметарот и фокусот на параболата:
а) $P: y^2 = \frac{2}{3}x$; б) $P: y^2 = 4x$; в) $P: y^2 = 0,5x$; г) $P: y^2 = 9x$.
- Напиши ја равенката параболата P , ако се знае фокусот:
а) $F(4, 0)$; б) $F(-5, 0)$; в) $F(\frac{3}{4}, 0)$.
- Напиши ја равенката на параболата P , ако се знае нејзината директриса:
а) $x + 5 = 0$; б) $3x + 7 = 0$; в) $2x - 5 = 0$; г) $4x - 7 = 0$.
- Напиши равенка на парабола чиј фокус е на x -оската и минува низ точката:
а) $M(3, -5)$; б) $M(-3, -4)$; в) $M(\frac{7}{2}, -3)$.
- Провери кои од точките $M_1(4, 6)$, $M_2(4, 5)$ и $M_3(2, 7)$ лежат на параболата $y^2 = 9x$.
- Која точка на параболата $y^2 = \frac{5}{2}x$ има еднакви координати?
- Состави равенка на парабола, која е кофокална со елипсата $9x^2 + 25y^2 = 225$ (фокусот на елипсата е фокус и на параболата).
- Состави равенка на парабола, која е конфокална со хиперболатата $x^2 - 8y^2 = 8$.
- Опреди ги пресечните точки на правата $l: 6x - y - 12 = 0$ и параболата $y^2 = 6x$.

4.3.11. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И ПАРАБОЛА

Како и кај другите криви од втор ред (кружница, елипса и хипербола), заемната положба на правата $l: y = kx + n$ и параболата $\Pi: y^2 = 2px$ ја определуваме разгледувајќи ги решенијата на системот равенки

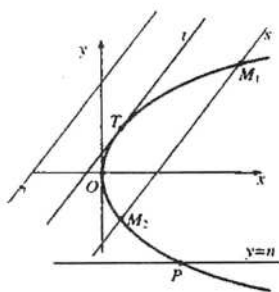
$$\begin{cases} y = kx + n \\ y^2 = 2px \end{cases} \quad (1)$$

Со замена на променливата y од првата равенка на системот во втората равенка, ја добиваме квадратната равенка

$$k^2 x^2 + 2(kn - p)x + n^2 = 0 \quad (2)$$

чија дискриминанта е

$$D = 4(kn - p)^2 - 4k^2 n^2 = 4(p^2 - 2knp) \quad (3)$$



црт.1

I. Нека $k \neq 0$. Во зависност од тоа дали $D > 0$, $D = 0$ или $D < 0$, квадратната равенка (2), а со тоа и системот равенки (1), има две различни реални решенија, има едно единствено реално решение или нема реални решенија. Соодветно со тоа правата l и параболата Π ги имаат следниве положби (црт.1):

1^о ако $D > 0$ т.е. $p^2 - 2knp > 0$, правата l ја сече параболата во две точки т.е. $l \cap \Pi = \{M_1, M_2\}$;

2^о ако $D = 0$, т.е. $p^2 - 2knp = 0$, правата l и параболата Π имаат една заедничка (допирна) точка т.е. $l \cap \Pi = \{T\}$, а релацијата $p^2 - 2knp = 0$ или

$$p = 2kn \quad (4)$$

претставува услов за допир на правата $l: y = kx + n$ и параболата $\Pi: y^2 = 2px$;

3^о ако $D < 0$, т.е. $p^2 - 2knp < 0$, правата l и параболата Π немаат заедничка точка, т.е. $l \cap \Pi = \emptyset$.

II. Ако $k = 0$, равенката (2) е линеарна и има единствено решение, т.е. правата l и параболата имаат една заедничка точка. Во овој случај правата l има равенка $y = n$, т.е. е паралелна со x -оската (црт.1)

➤ **Пример 1.** Дадена е правата $l: 2x + 2y - 5 = 0$ и параболата $\Pi: y^2 = 10x$. Да ја испитаме нивната заемна положба.

Решение. Во нашиот случај $k = -1$, $n = \frac{5}{2}$ и $p = 5$. Ако овие вредности ги замениме во релацијата (3) добиваме: $p^2 - 2knp = 25 - 2(-1) \cdot \frac{5}{2} \cdot 5 = 50 > 0$, па следува дека правата l и параболата имаат две заеднички точки. ■

➤ **Пример 2.** Дадена е правата $l: 3x + 2y - 9 = 0$ и параболата $\Pi: y^2 = 9x$. Да ја испитаме нивната заемна положба и ако имаат заеднички точки да ги определиме.

Решение. Овде $k = -\frac{3}{2}$, $n = \frac{9}{2}$ и $p = \frac{9}{2}$. Со замена во (3) имаме: $p^2 - 2knp = 81 > 0$,

па следува дека правата l и параболата Π имаат две заеднички точки, чии координати се решенијата на системот равенки:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 9 = 0 \\ y^2 = 9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 9 = 0 \\ y^2 + 6y - 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, & x_2 = 9 \\ y_1 = 3, & y_2 = -9 \end{cases}$$

Следува, пресечните точки се $M_1(1,3)$ и $M_2(9,-9)$ ■

➤ **Пример 3.** Дадена е правата $l: x - y + 8 = 0$ и параболата $\Pi: y^2 = 14x$. Да ја испитаме нивната заемна положба.

Решение. Од равенката на правата l имаме $k = 1$, $n = 8$, а од параболата $\Pi: 2p = 14$ т.е. $p = 7$. Со замена на овие вредности во релацијата (3) добиваме: $49 - 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 = 49 - 112 = -63 < 0$, од каде следува дека параболата и правата немаат заеднички точки, т.е. $l \cap \Pi = \emptyset$ ■

➤ **Пример 4.** Да ја определиме вредноста на параметарот m , така што правата $l: mx - 3y + m + 7 = 0$, да ја допира параболата $y^2 = 8x$.

Решение. Експлицитниот вид на правата l е $y = \frac{m}{3}x + \frac{m+7}{3}$, од каде $k = \frac{m}{3}$ и $n = \frac{m+7}{3}$, а од параболата $p = 4$. Ако овие вредности ги замениме во условот за допир (4) имаме $4 = 2 \cdot \frac{m}{3} \cdot \frac{m+7}{3}$ или $m^2 + 7m - 18 = 0$, од каде добиваме $m_1 = 2$ и $m_2 = -9$ ■

➤ **Пример 5.** Дадена е правата $l: x - 2y + 8 = 0$, која ја допира параболата $\Pi: y^2 = 2px$. Да ја определиме равенката на параболата.

Решение. Од равенката на правата l следува $k = \frac{1}{2}$ и $n = 4$. Сега, од условот за допир (4) добиваме $p = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 4$, па равенката на параболата ќе биде $y^2 = 8x$ ■

ЗАДАЧИ

- Испитај ја заемната положба на правата l и параболата Π , а потоа, најди ги заедничките точки ако постојат:
 - $l: 6x - y - 12 = 0$, $\Pi: y^2 = 6x$; б) $l: 2x + 2y + 5 = 0$, $\Pi: y^2 = 10x$;
 - $l: 2x - y + 6 = 0$, $\Pi: y^2 = 8x$.
- Најди ја должината на тетивата што правата l ја отсекува од параболата Π , ако:
 - $l: 2x + y - 2 = 0$ и $\Pi: y^2 = \frac{2}{3}\sqrt{5}x$; б) $l: 2x - 3y + 8 = 0$ и $\Pi: y^2 = 8x$.

3. Дадена е параболата $\Pi: y^2 = 8x$ и две точки од неа $M_1(2, y > 0), M_2(\frac{9}{2}, y > 0)$. Состави ја равенката на тетивата M_1M_2 .
4. Испитај дали дадената права l ја допира параболата Π , ако:
- а) $l: 2x - y + 2 = 0, \Pi: y^2 = 16x$; б) $l: x + 4y + 8 = 0, \Pi: y^2 = 2x$.
5. На дадена параболата Π , повлечи тангентата паралелна со дадена права l , ако е:
- а) $\Pi: y^2 = 9x, l: 3x + 2y - 4 = 0$; б) $\Pi: y^2 = \frac{9}{4}x, l: 3x - 4y = -12$.
6. Напиши ја равенката на тангентата на параболата $\Pi: y^2 = 4x$, која е нормална на правата $l: x + y + 5 = 0$.
7. Определи ја вредноста на параметарот m , така што дадената права l да биде тангентата на параболата Π , ако е: а) $l: x + my + 1 = 0, \Pi: y^2 = x$; б) $l: x - y + m = 0, \Pi: y^2 = 4x$; в) $l: mx - 2y + 3 = 0, \Pi: y^2 = 6x$.
8. Од точката $P(6, 8)$, повлечи тангенти на параболата $\Pi: y^2 = 8x$.
9. Како гласи равенката на параболата Π , ако правата $l: 8x - 3y + 24 = 0$ е нејзина тангентата?
10. Определи го аголот φ под кој се гледа параболата Π од точката P , ако е:
- а) $P(-2, 3), \Pi: y^2 = 8x$; б) $P(-6, -1), \Pi: y^2 = 4x$.
11. Состави ја равенката на тангентата l на параболата $\Pi: y^2 = 12x$, која со правата $l: 4x - 2y + 9 = 0$ зафаќа агол од 45° .

4.3.12. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА И НОРМАЛА ВО ТОЧКА ОД ПАРАБОЛАТА

Равенката на тангентата на параболата $\Pi: y^2 = 2px$ во една нејзина точка, ќе ја изведеме на ист начин како кај елипсата и хиперболата.

Нека е дадена параболата $\Pi: y^2 = 2px$ и точката $T(x_1, y_1)$ што лежи на Π (црт.1). Нека равенката на тангентата е

$$y = kx + n \quad (1)$$

Треба да ги определиме коефициентот на правецот k и n .

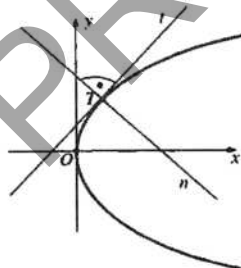
Со постапка аналогна на онаа со која ја одредивме тангентата на елипсата и хиперболата, добиваме

$$k = \frac{p}{y_1}, \quad n = \frac{px_1}{y_1}. \quad (2)$$

Со замена на овие вредности за k и n во равенката (1) ја добиваме равенката

$$l: y_1 y = p(x + x_1) \quad (3)$$

Равенката (3) е равенка на тангентата на параболата $\Pi: y^2 = 2px$, во точката $T(x_1, y_1) \in \Pi$.



црт.1

Обиди се за вежба да ја спроведеш целосната постапка за добивање на равенката (3). Сега можеме да ја запишеме и равенката на нормалата на параболата во точката

$T(x_1, y_1) \in \Pi$. Коефициентот на правец на нормалата во точката T е: $k_n = -\frac{y_1}{p}$, па равенката на нормалата на параболата ќе биде:

$$n: y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \quad (4)$$

или

$$n: p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0 \quad (5)$$

➤ **Пример 1.** Дадена е парабола $\Pi: y^2 = 12x$ и точка $T(3, 6)$ од неа. Да ја составиме равенката на тангентата во точката T .

Решение. Во дадениот случај имаме $p = 6, x_1 = 3, y_1 = 6$. Со замена на овие вредности во равенката (3) добиваме $t: 6y = 6(x + 3)$ или $t: x - y + 3 = 0$ ■

➤ **Пример 2.** Во точката $T(\frac{25}{4}, 5)$ од парабола $\Pi: y^2 = 4x$ да ги определиме равенката на тангентата и равенката на нормалата.

Решение. Имаме $p = 2, x_1 = \frac{25}{4}$ и $y_1 = 5$. Овие вредности ги заменуваме во равенствата (3) и (4) и ги добиваме равенките на тангентата и нормалата:

$$t: 5y = 2(x + \frac{25}{4}) \quad \text{или} \quad 4x - 10y + 25 = 0;$$

$$n: 2(y - 5) + 5(x - \frac{25}{4}) = 0 \quad \text{или} \quad 20x + 8y - 165 = 0 \quad \blacksquare$$

➤ **Пример 3.** Дадена е равенката на парабола $\Pi: y^2 = 10x$. Да ги најдешме равенките на тангентите во пресечните точки на правата $l: y = 4x - 5$ и парабола.

Решение. Со решавање на системот равенки $\begin{cases} y^2 = 10x \\ y = 4x - 5 \end{cases}$, ги добиваме пресечните

точки $M_1(\frac{5}{2}, 5)$ и $M_2(\frac{5}{8}, -\frac{5}{2})$, па со замена во равенката (2) ги добиваме равенките на тангентите: $t_1: 2x - 2y + 5 = 0$ и $t_2: 8x + 4y + 5 = 0$ ■

➤ **Пример 4.** Дадени се парабола $\Pi: y^2 = \frac{20}{3}x$ и елипса $E: \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$. Да ги определиме равенките на заедничките тангенти.

Решение. Нека равенките на заедничките тангенти се од вид $y = kx + n$. Со користење на условот за допир на правата и параболата $p = 2kn$, односно на права и елипсата:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2, \text{ го добиваме системот равенки: } \begin{cases} p = 2kn \\ a^2k^2 + b^2 = n^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2kn = \frac{10}{3} \\ 45k^2 + 20 = n^2 \end{cases}$$

чиј решенија се $k = \pm \frac{1}{3}$ и $n = \pm 5$. Заеднички тангенти се само правите $(t_1): x - 3y + 15 = 0$ и $t_2: x + 3y + 15 = 0$. Обиди се да го образложиш заклучокот ■

ЗАДАЧИ

- Состави равенка на тангента на параболата П во точка D од параболата, ако е:
 - $y^2 = 7x$ и $T(\frac{7}{4}, y > 0)$; б) $y^2 = 20x$ и $T(\frac{5}{4}, y > 0)$;
- Правата l е тангента на параболата П. Определи ја допирната точка, ако е:
 - $l: 7x + 8y + 8 = 0$ и $\Pi: y^2 = \frac{7}{2}x$; б) $l: x + 4y + 20 = 0$ и $\Pi: y^2 = 5x$;
 - $l: x + 4y + 4 = 0$ и $\Pi: y^2 = x$; г) $l: 4x - 2y + 3 = 0$ и $\Pi: y^2 = 6x$.
- Определи го аголот што го гради тангентата l повлечена во точката D од параболата П со позитивната насока на x-оската, ако е:
 - $T(2, y > 0)$ и $\Pi: y^2 = 8x$; б) $T(\frac{1}{2}, y < 0)$ и $\Pi: y^2 = 6x$.
- Определи ја точката M од параболата $\Pi: y^2 = 11x$, во која тангентата со позитивната насока на x-оската зафаќа агол од 120° .
- Напиши ја равенката на нормалата n на параболата П во точка од параболата M, ако е:
 - $M(4, 2)$ и $\Pi: y^2 = x$; б) $M(20, 10)$ и $\Pi: y^2 = 5x$; в) $M(\frac{5}{2}, -5)$ и $\Pi: y^2 = 10x$.
- Правата $l: 2x - y - 12 = 0$ ја сече параболата $\Pi: y^2 = 4x$ во две точки. Во пресечните точки се повлечени тангенти на параболата. Определи ја пресечната точка на тангентите.
- Најди ги равенките на заедничките тангенти на кривите $x^2 + y^2 = 2$ и $y^2 = 8x$.
- Определи ги заедничките тангенти на елипсата $E: 20x^2 + 45y^2 = 900$ и параболата $\Pi: y^2 = \frac{20}{3}x$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ (4.3.)

- Дадена е кружницата $K : x^2 + y^2 - 9 = 0$. Кои од точките лежат, а кои не лежат на кружницата:
а) $A(0,0)$; б) $B(3,0)$; в) $C(0,-3)$; г) $D(1,1)$?
- Напиши ја равенката на кружницата K со радиус r и центар S , ако е:
а) $r = 3, S(0,0)$; б) $r = 5, S(0,2)$; в) $r = \frac{3}{4}, S(1, -\frac{1}{2})$; г) $r = 4, S(-3,0)$.
- Напиши равенка на кружница, со радиус $r = 6$, што минува низ точката $N(0,-4)$ и низ координатниот почеток.
- Состави равенка на кружницата K , што минува низ три точки:
а) $A(1,4), B(-7,4), C(2,-5)$; б) $A(7,7), B(0,8), C(-2,4)$.
- Опреди го радиусот r и координатите на центарот S на кружницата K :
а) $K : x^2 + y^2 - 4y - 96 = 0$; б) $K : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$;
б) в) $K : 36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 131 = 0$;
- Состави равенка на кружницата K со радиус $r = 4$, а центарот е во пресекот на правите $l_1 : 4x + y - 34 = 0$ и $l_2 : x + 4y - 16 = 0$.
- Напиши равенка на кружницата K , со центар $S(-3,4)$, која минува низ координатниот почеток.
- Напиши равенка на кружницата K , која ја допира x -оската и има центар $S(2,-3)$.
- Напиши равенка на кружницата K , која ја допира y -оската и има центар $S(-4,-2)$.
- Состави равенка на кружницата K , која ја допира правата $l : 2x - 5y + 43 = 0$ и има центар $S(3,4)$.
- Напиши равенка на кружница која е концентрична со кружницата $K : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ и ја допира правата $l : 3x - 4y + 7 = 0$.
- Правата $l : 4x + 3y - 52 = 0$ е тангента на кружницата $K : x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$. Опреди ја равенката на правата што минува низ допирната точка и е паралелна со правата $l : 10x - 5y + 3 = 0$.
- Испитај ја меѓусебната положба на кружниците:
а) $K_1 : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ и $K_2 : x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$;
б) $K_1 : x^2 + y^2 - 10x - 20 = 0$ и $K_2 : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.
- Опреди ги равенките на заедничките тангенти на кружниците:
а) $K_1 : x^2 + y^2 = 9$ и $K_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$;
б) $K_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ и $K_2 : (x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$.
- Опреди го аголот под кој кружницата $K : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, се гледа од точката $P(9,2)$.
- * Напиши равенка на кружницата K , впишана во триаголник со страни $y = 0$, $3x - 4y + 12 = 0$ и $5x + 12y - 100 = 0$.
- Под кој агол се сечат кружниците $K_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$ и $K_2 : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$?
- Напиши ја равенката на елипсата E , ако:
а) полуоските и се 9 и 5; б) големата оска и е 20, а бројниот ексцентрицитет е $\frac{12}{13}$;
в) фокусното растојание и е $4\sqrt{11}$, а бројниот ексцентрицитет е $\frac{\sqrt{11}}{6}$.
- Опреди ги координатите на темињата и координатите на фокусите на елипсата $E : 16x^2 + 25y^2 = 400$.

20. Определи ја апсцисата на точката $M(x,1)$ од елипсата $E: 3x^2 + 4y^2 = 12$.
21. Најди ги пресечните точки на елипсата $E: 36x^2 + 64y^2 = 2304$ и правата $y = x$.
22. За која вредност на параметарот n правата $y = 2x + n$ има една заедничка точка со елипсата $E: 24x^2 + 30y^2 = 720$?
23. Напиши равенка на тангентата на елипсата $E: 2x^2 + 3y^2 = 120$, која на координатните оски отсекува еднакви отсечки.
24. Напиши ги равенките на тангентите на елипсата $E: x^2 + 2y^2 = 6$, повлечени од пресечната точка на правите $l_1: 7x - 3y - 1 = 0$ и $l_2: y - 2 = 0$.
25. Низ фокусот $F_1(-c,0)$ на елипсата $E: 16x^2 + 25y^2 = 400$, е повлечена тетива која со позитивната насока на x -оската зафаќа агол од 30° . Напиши ја равенката на тетивата.
26. Состави ја равенката на елипсата E , чии тангенти се $t_1: 4x - 5y + 25 = 0$ и $t_2: 9x + 20y - 75 = 0$.
27. За која вредност на параметарот m , правата $l: x - my - 5 = 0$ е тангента на елипсата $E: 9x^2 + 16y^2 = 144$?
28. Определи ги пресечните точки на кружницата $K: (x-5)^2 + y^2 = 25$ и елипсата $E: x^2 + 2y^2 = 36$.
29. Под кој агол се сечат елипсата $E: x^2 + 3y^2 = 36$ и кружницата $K: x^2 + y^2 - 24x + 54 = 0$?
30. Напиши ги равенките на заедничките тангенти на елипсите $E_1: 4x^2 + 5y^2 = 20$ и $E_2: 5x^2 + 4y^2 = 20$.
31. Напиши ги заедничките тангенти на кружницата $K: (x - \frac{7}{2})^2 + y^2 = \frac{45}{4}$ и елипсата $E: 3x^2 + 4y^2 = 12$.
32. Под кој агол се гледа елипсата $E: x^2 + 2y^2 = 6$ од центарот на кружницата $K: x^2 + y^2 - 2x - 8y + 16 = 0$?
33. Кои криви од втор ред се претставени со равенките:
 а) $y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$; б) $y = \frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$; в) $x = \frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$?
34. Напиши равенка на хипербола, ако се дадени:
 а) $c = 3$ и $\varepsilon = \frac{3}{2}$; б) $2a = 48$, $\varepsilon = \frac{13}{12}$; в) $\varepsilon = \sqrt{2}$, а $M(-5,3)$ е точка од хиперболата.
35. Дадена е елипсата $E: 9x^2 + 25y^2 = 225$. Напиши равенка на хипербола која е конфокална со дадената елипса и чии нумерички ексцентрицитет е $\varepsilon = 2$.
36. Дадена е равенката на рамнострани хипербола $H: x^2 - y^2 = 8$. Состави ја равенката на конфокалната хипербола која минува низ точката $M(-5,3)$.
37. Определи ги координатите на пресечните точки на хиперболата H и правата l , ако е:
 а) $H: 4x^2 - y^2 = 36$ и $l: x - y + 3 = 0$; б) $H: 3x^2 - y^2 = 3$ и $l: 2x - y - 1 = 0$;
 в) $H: x^2 - y^2 = 9$ и $l: 2x - y - 2 = 0$.
38. Напиши равенка на хипербола која минува низ точките:
 а) $M_1(15,9)$ и $M_2(13,5)$; б) $M_1(5,3)$ и $M_2(8,-10)$.

39. Во равенката на правата $l: x - y + m = 0$, определи ја вредноста на параметарот m , така што правата да биде тангентата на хиперболата $H: 3x^2 - 4y^2 = 12$.
40. Во равенката на правата $l: mx - 3y - 24 = 0$, определи го параметарот m , така што правата l да е тангентата на хиперболата $H: x^2 - y^2 = 36$.
41. Напиши ја равенката на тангентата на хиперболата $H: 3x^2 - y^2 = 3$, која со правата $l: 3x + y = 0$, зафаќа агол од 45° .
42. Напиши ги равенките на заедничките тангенти на кривите од втор ред: $25x^2 + 100y^2 = 4$ и $x^2 - 3y^2 = 1$.
43. Напиши ги равенките на заедничките тангенти на кривите $3x^2 - 4y^2 = 12$ и $2x^2 + 2y^2 = 1$.
44. Определи го аголот меѓу тангентите повлечени од точката $M(1,0)$ на хиперболата $H: x^2 - 2y^2 = 2$.
45. Кои криви од втор ред се претставени со равенките:
- а) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$; б) $x = \frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$; в) $y = \frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$?
46. Напиши равенка на елипса која е конфокална со хиперболата $H: x^2 - y^2 = 8$ и минува низ точката $M(4,6)$.
47. Определи ги координатите на фокусот и равенките на директрисите на параболите:
- а) $\Pi: y^2 = -8x$; б) $\Pi: y^2 = -6x$; в) $\Pi: x^2 = 10y$; г) $\Pi: x^2 = 12y$.
48. Определи ја должината на тетивата која ја отсекува параболата Π од дадена права l :
- а) $\Pi: y^2 = 4x$, $l: 2x - y - 4 = 0$; б) $\Pi: y^2 = 18x$, $l: x - y + 4 = 0$.
49. Напиши равенка на парабола со теме во координатниот почеток и симетрична во однос на x -оската, а минува низ точката: а) $M(2,-6)$; б) $M(-5,-5)$.
50. Најди ги пресечните точки на параболата $\Pi: y^2 = 4x$ со правата:
- а) $l: 2x - y = 0$; б) $l: x - y + 5 = 0$.
51. Определи ги пресечните точки на кривите линии:
- а) $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 - 12x + 16 = 0$; б) $y^2 = 8x$ и $x^2 + 2y^2 = 36$;
- в) $y^2 = 6x$ и $4x^2 - 3y^2 = 36$.
52. Дадена е тангентата $l: 3x - y + 4 = 0$ на параболата Π . Определи ја равенката на параболата.
53. Дадена е параболата $\Pi: y^2 = 4x$ и точката $M(-2,4)$. Определи ја пресечната точка на тангентите повлечени од пресекот на параболата Π со правата определена со точките $M_1(-10,9)$ и $M_2(14,-7)$.
54. Под кој агол се сечат кривите линии од втор ред:
- а) $y^2 = 8x$ и $(x+2)^2 + y^2 = 32$; б) $2y^2 = 9x$ и $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$.
55. Напиши ги равенките на заедничките тангенти на кривите линии:
- а) $y^2 = 20x$ и $9x^2 + 16y^2 = 144$; б) $y^2 = 9x$ и $18x^2 + 9y^2 = 162$;
- в) $y^2 = 16x$ и $9x^2 - 25y^2 = 225$; г) $y^2 = 16x$ и $12x^2 - 4y^2 = 48$.
56. Кои криви линии од втор ред се претставени со равенките:
- а) $y = 2\sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{-x}$; в) $x = \sqrt{-2y}$.

PROSVETNO DELO

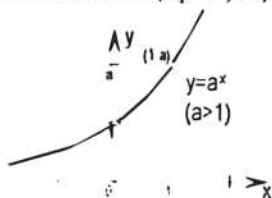
ОДГОВОРИ И РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

ТЕМА 1

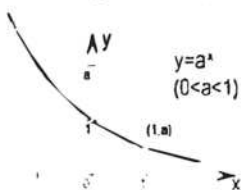
1.1.1.

1.а) $D=\mathbb{R}$, б) 2. $D=\mathbb{R} \setminus \{0\}$, в) $D=\mathbb{R} \setminus \{3\}$, г) $D=\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, д) $D = [-3, \infty)$. 2. а) монотонно расте (црт.1).

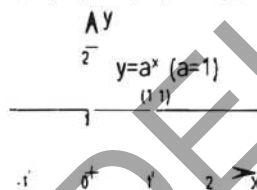
б) монотонно опаѓа (црт.2), в) константна (црт.3). 3. а) $5^{\sqrt{3}} > 5^{\sqrt{2}}$, б) $(1.5)^{\frac{3}{4}} > (1.5)^{\frac{2}{3}}$, в) $(0.5)^{\sqrt{2}} > (0.5)^{\sqrt{3}}$.



црт. 1

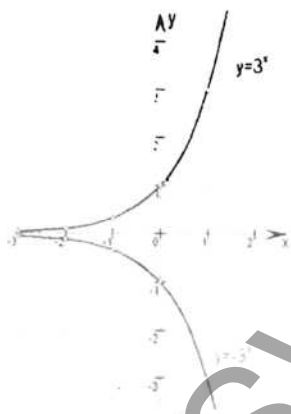


црт. 2

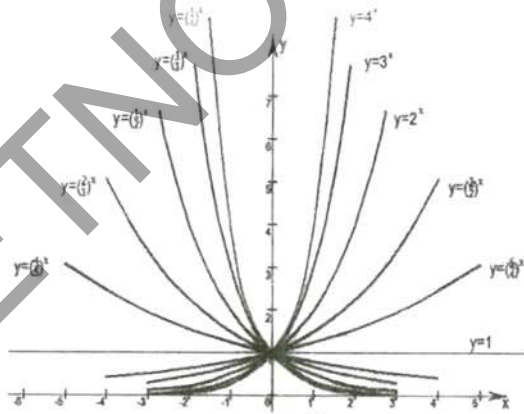


црт. 3

4. Симетрични во однос на Ox оската (црт.4); 5. Графиците се претставени на цртежот 5:

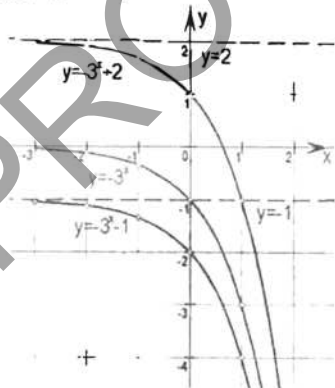


црт. 4

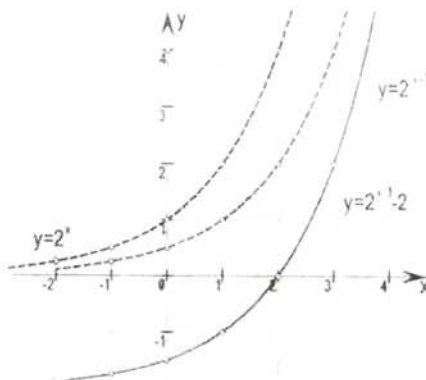


црт. 5

6. Графиците на функциите се претставени на цртежот 6. 7. Графиците на функциите се претставени на цртежот 7.

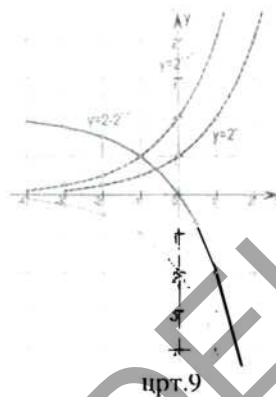
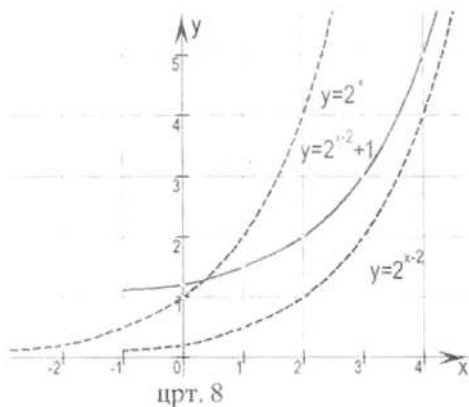


црт. 6



црт. 7

8. Графиците на функциите се претставени на цртежот 8.



9. Редоследот на цртањето на графикаите (црт. 9) е $y = 2^x$, $y = 2^{x+1}$, $y = -2^{x+1}$, $y = -2^{x+1} + 2$;

1. 1. 2.

1. а) 2. б) -3. в) -3; 2. а) $\frac{1}{2}$. б) 4. в) 6; 3. а) 7. б) 1; 4. а) -1 и 2. б) 1 и 2; 5. -2; 6. а) 1. б) 2; 7. а) 2. б) -1;
8. а) 1. б) 0 и 1; 9. а) 1. б) 1; 10. 0 и $\frac{1}{9}$.

1. 2. 1.

1. а) $\log_2 32 = 5$. б) $\log_3 1 = 0$. в) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$. г) $\log_5 \frac{5}{2} = -1$. д) $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$; 2. а) $4^3 = 64$. б) $10^2 - \frac{1}{100}$.
в) $0.2^{-2} = 25$. г) $(\sqrt{3})^4 = 9$. д) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$; 3. а) 2. б) -3. в) 8. г) -2; 4. а) 8. б) $\frac{1}{3}$. в) 2. г) 1.5;
5. а) 32. б) 6. в) 0.008. г) 9; 6. а) 100. б) $\frac{6}{5}$; * 8. а) 0. б) 0.

1. 2. 2.

1. а) 2.37; б) 1.897; в) 0.6; г) -0.6; д) -1.86742. 2. а) 1.27673; б) 30.62; в) 2003; г) 0.0034.
3. а) 1.2932; б) -0.1505; в) 1.602318088. 4. а) $\lg 5 + \lg a + \lg c$. б) $\lg 2 + \lg a + \lg d + \lg p - \lg 3 - \lg b - \lg c$.
в) $\lg a + 2 \lg b + 3 \lg c$; г) $\lg c + \frac{5}{3} \lg a + \frac{4}{3} \lg b$; д) $\lg 2 + \lg a + 3 \lg b - \frac{2}{5} \lg c$. 5. а) $\lg x = 3.12121 \Rightarrow x = 1322$;

$$\text{б) } \lg x = \frac{1}{2} \left(\lg 5 + \frac{1}{2} \left(\lg 4 + \frac{1}{2} \left(\lg 3 + \frac{1}{2} \lg 2 \right) \right) \right) \Rightarrow \lg x = 0.578454531 \Rightarrow x = 3.788388688 : \text{в) } 13.875.$$

1. 2. 3.

1. а) 3. б) $\frac{1}{2}$. в) $\frac{1}{12}$. г) 3. 2. а) $\frac{2}{3}$. б) 2. в) $\frac{1}{2}$. 3. а) $3 \log_5 2$. б) $\frac{1}{2} \log_2 3$. 4. а) $\frac{2}{3} b$. б) $\frac{2}{3} b$. 5. а) $\log_7 7$. б) $\log_7 4$.

$$6. \log_7 7 \cdot \log_6 5 \cdot \log_3 6 + 1 = \frac{\lg 7}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 6} \cdot \frac{\lg 6}{\lg 3} + 1 = \frac{\lg 7}{\lg 3} + \frac{\lg 3}{\lg 3} = \frac{\lg 7 + \lg 3}{\lg 3} = \frac{\lg 7 \cdot 3}{\lg 3} = \frac{\lg 21}{\lg 3} = \log_3 21.$$

$$7. \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} = \log_x a + \log_x b + \log_x c = \log_x (a \cdot b \cdot c) = \log_x abc.$$

$$8. \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\frac{1}{2} \log_a x} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{2}{\log_a x} = \frac{3}{\log_a x} = 3 \log_x a.$$

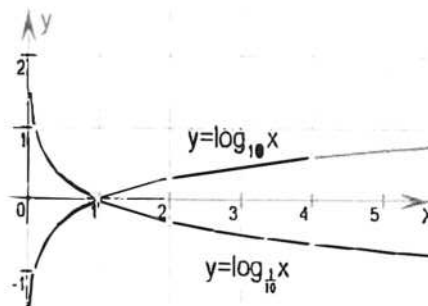
1. 2. 4.

1. а) $D = (1, \infty)$. б) $D = (0, 2)$. в) $D = (0, \infty)$. г) $D = (2, \infty)$; 2. а) монотонно расте. б) монотонно опаѓа. в) монотонно опаѓа. г) монотонно расте; 3. а) $\ln 5 > \ln 3$. б) $\log_3 3 > \log_3 1$. в) $\log_5 \pi > \log_5 \sqrt{5}$. г) $\log_{0.5} \frac{1}{5} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$.

4. Графиците на функциите се претставени на цртежот 1. Овде основата на логаритамот $a > 1$, доколку таа се зголемува графикот на соодветната функција е поблизу до координатните оски, значи функцијата побавно расте.



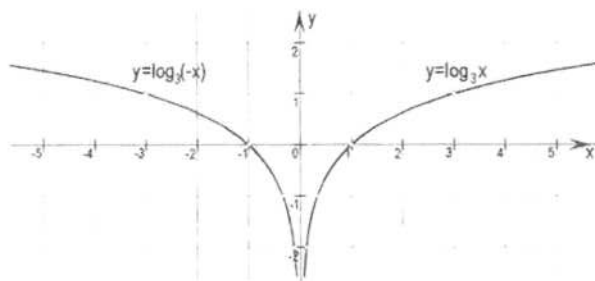
црт. 1



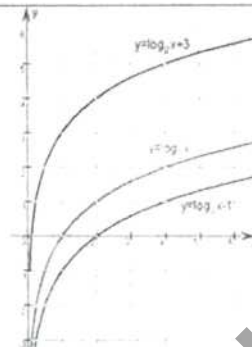
црт. 2

5. Графиците се претставени на цртежот 2. Кај нив постои симетрија во однос на x -оската.

6. Графиците се претставени на цртежот 3. Кај нив постои симетрија во однос на y -оската.

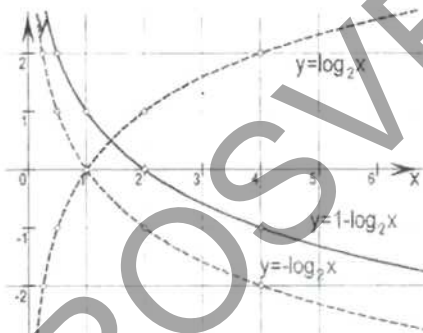


црт.3

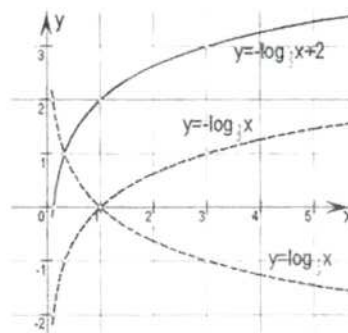


црт.4

7. Најнапред го црташ графикот на функцијата $y = \log_2 x$, потоа оној на функцијата $y = \log_2 x - 1$, поместен за една единица надолу и оној на функцијата $y = \log_2 x + 3$, поместен за три единици нагоре. Графиците се прикажани на цртежот 4.
- *8. На цртежот 5 е прикажан графикот на функцијата $y = 1 - \log_2 x$, при што редоследот на цртањето е: $y = \log_2 x$, $y = -\log_2 x$, $y = 1 - \log_2 x$.
- *9. На цртеж 6 прикажан е графикот на функцијата $y = -\log_1 x + 2$, при што редоследот на цртањето е: $y = \log_1 x$, $y = -\log_1 x$, $y = -\log_1 x + 2$.
- *10. На цртежот 7 е прикажан графикот на функцијата $y = \log_2 (-x-1) + 1$, при што редоследот на цртањето е: $y = \log_2 x$, $y = \log_2 (x+1)$, $y = \log_2 (-(x+1))$, $y = 1 + \log_2 (-x-1)$.

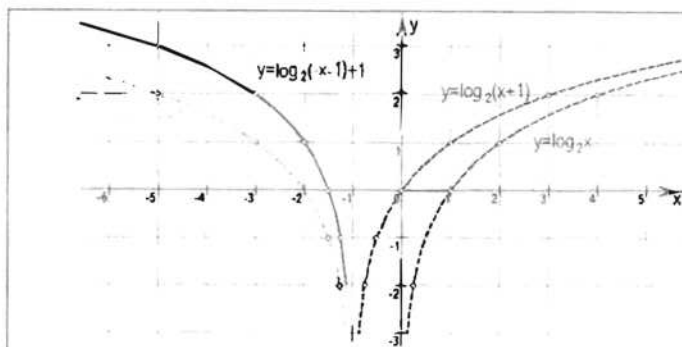


црт. 5

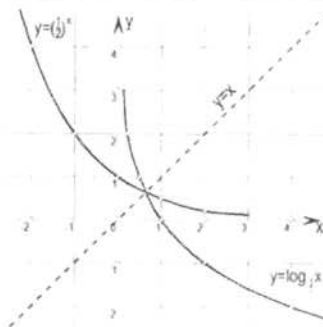


црт. 6

11. Графиците на експоненцијалната и логаритамската функција се прикажани на црт. 8. Тие се симетрични во однос на правата $y = x$, симетрала на првиот и третиот квадрант, види пример 7.



црт. 7



црт.8

I. 2. 5.

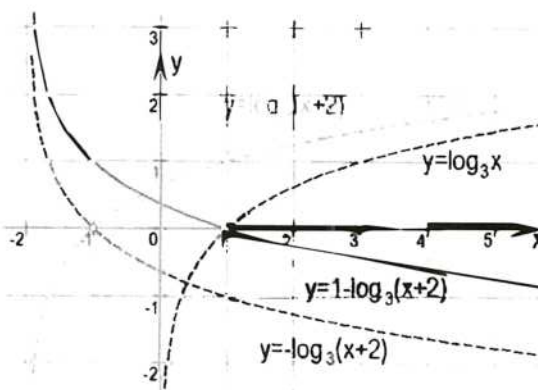
1. а) 9. б) 18; 2. а) 4. б) 2; 3. а) 12. б) 5; 4. а) $\frac{1}{10}$ и 100. б) $\sqrt{0.001}$ и 10; 5. а) 1000 и $\sqrt{0.00001}$. б) 10 и 100; 6. а) 16. б) 2; 7. а) $\lg 5^{x+1} = \lg 2 \Leftrightarrow (x+1)\lg 5 = \lg 2 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 2}{\lg 5} - 1 \Rightarrow x = -0.57$; б) 1. в) 0.1 и 10;
8. $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2(2^{2x} + 4) = x \log_2 2 + \log_2(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2(2^{2x} + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2(2^{2x} + 4) = \log_2[2^x \cdot (2^{x+1} - 3)] \Rightarrow 2^{2x} + 4 = 2^x \cdot (2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow 2^{2x} + 4 = 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ 1.

1. а) a . б) $a^{\sqrt{3}-4}$. в) a^2 . 2. б) Графикот на бараната функција $y = 2 - 2^{x+1}$ е даден на цртежот 1.



црт. 1



црт. 2

3. а) -3; б) 2.75; в) 1. 4. а) -3; б) 1; в) -3. 5. а) $\frac{4 \pm \sqrt{14}}{2}$; б) $\frac{17}{13}$. 6. а) 3, б) 2. 7. а) 1; б) 4. 8. а) 0 и $\frac{1}{9}$; б) 3.

9. а) $\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}$. б) 5; 8. 10. а) -2; 2; $\frac{1}{3}$; б) 2; 1.5; 2; в) 1.5; 6. 11. б) Графикот на функцијата $y = 1 - \log_3(x+2)$ е даден на цртежот 2. 12. а) 0.125, б) 256. 13. а) За равенката $\log_{x-2}(x^3 - 56) = 3$, ги имаме следниве услови: $x^3 - 56 > 0$, $x - 2 > 0$ и $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x^3 > 56 \wedge x > 2 \wedge x \neq 3$. значи решенијата на оваа равенка мора да ги задоволуваат истите. Логаритамска равенка е еквивалентна со равенката: $(x-2)^3 = x^3 - 56 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$, чии решенија се $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, но само $x_2 = 4$ е решение. б) -7 и 9. 14. а) $\lg(x+2) + \lg(x-1) = \lg 4 \Leftrightarrow \lg(x+2)(x-1) = \lg 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$, $x_2 = 2$, од кои само $x_2 = 2$ е решение. б) $\lg(x+1) = \lg 6 - \lg x \Leftrightarrow \lg(x+1) = \lg \frac{6}{x} \Leftrightarrow x+1 = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow$ само $x_2 = 2$ е решение. 15. а) 0.1 и 100. б) $\frac{1}{\lg x} = 2 + \lg \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\lg x} = 2 + \lg 1 - \lg x \Leftrightarrow \frac{1}{\lg x} = 2 + 0 - \lg x$. Со смената $\lg x = y$ се добива равенката: $y^2 - 2y + 1 = 0$, чие решение е $y = 1$, од каде $x = 10$ е решение на дадената равенка. 16. а) $\sqrt{5}$ и 25. б) $\log_2 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{\log_2 4x} \Leftrightarrow \log_2 4 + \log_2 x = \log_2 x \cdot (\log_2 2 + \log_2 x) \Leftrightarrow 2 + \log_2 x = \log_2 x + (\log_2 x)^2$. Со смената $\log_2 x = y$, равенката се сведува на $(\log_2 x)^2 = 2$, чии решенија се: $x_1 = 2^{-\sqrt{2}}$, $x_2 = 2^{\sqrt{2}}$. 17. а) 27, б) 27. 18. а) 4, б) 9. 19. Упайтсйво. Користи го основниот логаритамски идентитет, во двата случаја ја добиваш квадратната равенка: $x^2 + x - 6 = 0$. Решенијата се: под а) 3, б) 3. 20. $2^{2+\lg x} + 2^{\lg x} = 20 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 2^{\lg x} + 2^{\lg x} = 20$. Со смената $y = 2^{\lg x}$, дадената равенка станува еквивалентна на равенката: $5y = 20 \Rightarrow y = 4$. Значи: $2^{\lg x} = 4 \Leftrightarrow 2^{\lg x} = 2^2 \Leftrightarrow \lg x = 2 \Rightarrow x = 100$.

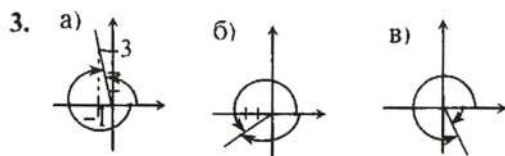
ТЕМА 2

2.1.1

1. а) 150° ; б) $\frac{\pi}{6}$. 2. а) -185° ; б) $\frac{5\pi}{8}$. 3. а) 150° ; б) $-\frac{3\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{2}$. 4. а) $-270^\circ + 0 \cdot 360^\circ$; б) $90^\circ + 1 \cdot 360^\circ$; в) $-240^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$ или $120^\circ + (-3) \cdot 360^\circ$; г) $5 \cdot 360^\circ$; д) $-231^\circ + (-7) \cdot 360^\circ$ или $129^\circ + (-8) \cdot 360^\circ$. 5. а) 0 ; -330° ; б) 0 ; 45° ; в) 0 ; 120° ; г) 2 ; 80° ; д) 0 ; -12° ; е) 0 ; 15° ; ж) $+1$; 340° ; з) $+3$. 6. а) $15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$; б) $-75^\circ = -\frac{5\pi}{12}$; в) $\frac{7\pi}{12}$; г) $-\frac{3\pi}{4}$; д) $\frac{5\pi}{3}$; е) $\frac{8\pi}{9}$; ж) $\frac{5\pi}{2}$; з) $-\frac{13\pi}{6}$; и) $\frac{52\pi}{9}$; ј) $-\frac{125\pi}{9}$; к) $\frac{2\pi}{5}$; 7. а) $\pi + 7 \cdot 2\pi$; б) $\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$; в) $\frac{9\pi}{5} - 2 \cdot 2\pi$; г) $\frac{7\pi}{8} + 2\pi$; д) $\frac{5\pi}{6} - 6\pi$; 8. а) 75° ; б) 765° ; в) -960° ; г) 930° ; д) -2070° ; е) $-342^\circ 30'$. 9. а) 15° ; $\frac{\pi}{12}$; б) 20° ; $\frac{\pi}{9}$; в) 120° ; $\frac{2\pi}{3}$. 10. а) 720° ; 4π ; б) 8640° ; 48π . 11. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{12}$.

2.1.2

1. а) I кв. б) II в) IV г) IV д) IV. ф) III е) I ж) II з) II
 2. а) I кв. б) II в) II г) III д) IV ф) II е) III



4. а) 0, 1, 0, не постоя; б) 1, 0, не постоя, 0;

в) $\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}, -3, -\frac{1}{3}$ г) 0, -1, 0, не

постоя д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1, -1 ф) -1, 0, не

постоя, 0; е) $-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{2}, -\frac{2}{5}$.

2.1.3

2. има две точки; симетрични во однос на x -оската. 3. а) и б)

2.1.4

3. а) I и III б) во ни еден в) I и II 4. а) III и II б) I и II в) III и IV 5. а) позитивен б) позитивен
 в) негативен; г) негативен; д) негативен; ф) негативен 6. а) позитивен б) позитивен в) негативен

2.1.5

1.

	$0 (0^\circ)$	$\frac{\pi}{6} (30^\circ)$	$\frac{\pi}{4} (45^\circ)$	$\frac{\pi}{3} (60^\circ)$	$\frac{\pi}{2} (90^\circ)$	$\pi (180^\circ)$	$\frac{3\pi}{2} (270^\circ)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не постоя	0	не постоя
$\operatorname{ctg} \alpha$	не постоя	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не постоя	0

3. а) $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 4; в) 1. 4. а) да; б) да; в) не. 5. а) 2; б) не постоя; в) 0.

6. а) точно, точно, точно; б) точно, точно, точно; в) точно, точно, точно.

2.1.6

1. $\sin \alpha$; 2. $\sin \alpha \cos \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; 3. $\cos \alpha, \alpha \neq (2k+1)\pi$; 4. $\frac{1}{\sin \alpha}, \alpha \neq k\pi$ 5. $\frac{2}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$

16. Решение. $\cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha + 2)(2 \operatorname{tg} \alpha + 1) - 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \cos^2 \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 \right) \left(2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) - 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha =$
 $= \frac{\cos^2 \alpha \cdot (\sin \alpha + 2 \cos \alpha)(2 \sin \alpha + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} - 5 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha + 5 \cos \alpha \cdot \sin \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 5 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2.$

17. Решение: $\frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} = \frac{2}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$

2.1.7

1.

дадена →	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin \alpha$		$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$		$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	

$$2. \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{tg} \alpha = -1, \operatorname{ctg} \alpha = -1$$

3.

$$\sin \alpha = -\frac{7}{25}, \cos \alpha = -\frac{24}{25}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24}$$

$$4. \frac{49}{81} \quad 6. \frac{8}{13}$$

7. $\frac{3 \operatorname{tg} \alpha - 2}{\operatorname{tg} \alpha + 1}$ Упатство: броителот и именителот подели ги со $\cos \alpha$

$$8. \frac{8}{7} \quad 9. \frac{3}{5} \text{ и } \frac{4}{5}$$

2.1.8.

2. а) да; б) да; в) да 3. а) парна; б) ниту парна, ниту непарна; в) парна; г) непарна; д) непарна; е) ниту парна ниту непарна 4. б) **Решение:** Нека $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$, тогаш за $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
 $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = h(x)$

5. а) $\sin 235^\circ < \sin 359^\circ < \sin 133^\circ < \sin 18^\circ$; б) $\cos \frac{7\pi}{6} < \cos \frac{3\pi}{4} < \cos \frac{11\pi}{12} < \cos 0$; в) $\operatorname{tg} 277^\circ < \operatorname{tg} 120^\circ < \operatorname{tg} 0^\circ < \operatorname{tg} 14^\circ$;

г) $\operatorname{ctg} 350^\circ < \operatorname{ctg} 110^\circ < \operatorname{ctg} 215^\circ < \operatorname{ctg} 24^\circ$; д) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} < \operatorname{ctg} 0 < \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6} < \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12}$

6. а) негативна; б) негативна; в) позитивна; г) позитивна; д) негативна; е) негативна

7. а) негативен; б) негативен; в) негативен

2.1.9

$$1. \text{ а) } \sin 150^\circ = \frac{1}{2}; \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \operatorname{ctg} 150^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{ б) } \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}; \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6} = \sqrt{3};$$

$$\text{ в) } \sin 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \operatorname{tg} 315^\circ = -1; \operatorname{ctg} 315^\circ = -1$$

2.

агол φ-ја	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
		$\pi - \frac{\pi}{4}$		$2\pi - \frac{\pi}{4}$	
sin	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tg	-1	-1	1	-1	1
ctg	-1	-1	1	-1	1

$$3. 0 \quad 4. \frac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \quad 5. \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 6. 0$$

7. $2\sin \alpha$. Упатство: искористи ја парноста на косинусот. Пример, $\cos(\alpha - \pi) = \cos(-(\pi - \alpha)) = \cos(\pi - \alpha)$

$$8. -\cos \alpha \quad 9. \sin \alpha \quad 10. 2\sin \alpha$$

2. 2.3

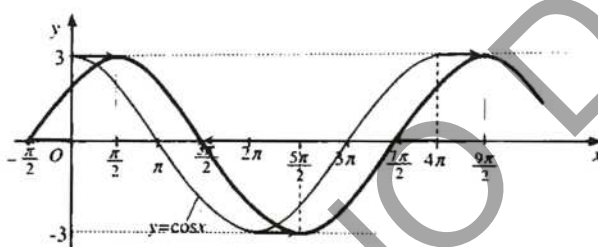
4. г) Решение.

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$
$3\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$	3	0	-3	0	3
	max	нула	min	нула	max

Амплитудата за оваа функцијата е 3; основниот период

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi, \text{ а основниот интервал е } [-\frac{\pi}{2}, 4\pi - \frac{\pi}{2}] \text{ т.е.}$$

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$; нулите се во точките $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ и $x = \frac{7\pi}{2}$; максимумот $y=3$ е во $x = \frac{\pi}{2}$, а минимумот $y=-3$ е во $x = \frac{5\pi}{2}$ (црт.3).



црт.3

2.3.1.

2. а) $\cos \alpha$; 3. $\sqrt{2} \cos \alpha$; 4. 1; 5. $5\sqrt{3} - 8$; 6. $-\frac{13\sqrt{3} + 24}{3}$; 7. $\frac{5\sqrt{3} + 12}{26}$; 8. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

2.3.2

1. а) $\frac{120}{169}$; б) $\frac{12}{13}$. 2. а) $\frac{4}{5}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) $-\frac{4}{3}$; г) $-\frac{3}{4}$. 3. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$ 4. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$. 5. $\frac{1}{2}$ 6. $\frac{\cos \alpha}{2}$.

11. Упатство: тргни од десната страна

2.3.3

1. а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{4}$ 2. $-\sin 5^\circ$ 3. $\sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha)$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 25^\circ \cos 35^\circ}$ 5. $-\frac{\sqrt{2}}{2 \sin \frac{5\pi}{4}}$

6. точно 7. точно 8. точно 10. Упатство: користи $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$ 11. а) $\frac{1}{2}(\sin 10^\circ + \sin 20^\circ)$; б)

$$\frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{24} - \cos \frac{5\pi}{24})$$

2.4.1

1. б; в; г 2. а) $k\pi$; б) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; в) $48^\circ 35' + k \cdot 360^\circ$; $131^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
 3. а) $2k\pi$; б) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$; в) $\pm 143^\circ 8' + k \cdot 360^\circ$ 4. а) $\frac{\pi}{3} + k\pi$; б) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$; в) $52^\circ 26' + k \cdot 180^\circ$ или во радијани: $0.915 + k\pi$ 5. а) $\frac{\pi}{3} + k\pi$; б) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$; в) $18^\circ 26' + k \cdot 180^\circ$ 6. $-15^\circ + k \cdot 360^\circ$; $-165^\circ + k \cdot 360^\circ$
 7. $\pm \frac{\pi}{18} + 2k\pi$ 8. $\frac{\pi}{7} + k\pi$ 9. $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

2.4.2

1. а) $[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi$; б) $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ в) $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ 2. а) $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; б) $70^\circ + k \cdot 180^\circ$; в) $[90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \cdot 360^\circ$ 3. а) $\pi + 3k\pi$; б) $-220^\circ + k \cdot 720^\circ$; в) $\pm \frac{5\pi}{12} + k\pi$
 4. $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, 0.7288 + 2k\pi, 2.4127 + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 5. $[\frac{\pi}{2} + k\pi, (2k+1)\pi$ 6. $[k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi$
 7. $[\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ 8. $[(2k+1) \cdot 180^\circ, \pm 109^\circ 30' + k \cdot 360^\circ$ 9. $[45^\circ + k \cdot 180^\circ, 76^\circ + k \cdot 180^\circ$ 10. $[k \cdot 180^\circ, = 95^\circ + k \cdot 180^\circ$
 11. $[k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi$ 12. $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi$ 13. $[\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k\pi$ 14. $[k\pi; \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$
 15. $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

2.5.1.

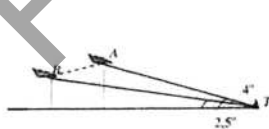
1. $\gamma = 75^\circ, b = 2\sqrt{3}, c = 3 + \sqrt{3}$; 2. $\gamma = 5^\circ, \alpha = 105^\circ, a = 3 + \sqrt{3}$; 3. $\beta = 60^\circ, \gamma = 45^\circ, \alpha = 75^\circ, a = (1 + \sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 4. $\gamma = 75^\circ, a = 43, b = 6\sqrt{2}, c = 2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$; 5. $L = 46, P = 60\sqrt{3}$

2.5.2.

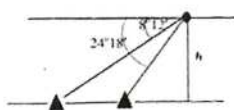
1. $b = 7$; 2. $a = 7, b = 13$; 3. $a = 13, b = 15$; 4. 7; 5. Упатство: тоа е аголот наспроти страната со должина 7;
 6. $c = 12, d = 8$; 7. $\alpha \approx 58^\circ, \beta \approx 46^\circ 34'$;

2.5.3

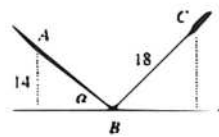
2. 51,80 (црт.2) 3. 84,58м 4. 14,15km/h 5. 84,58м (црт.3) 6. (црт.4) $P = 132\text{N}$ Упатство: $F = Q \sin \alpha$



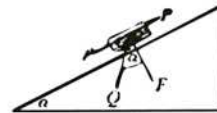
црт.1



црт.2



црт.3



црт.4

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ 2

1. $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$; $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$; $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$ 2. $\alpha = \frac{5\pi}{12}$
 3. $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$; $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$ 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, 1, 0 5. $-\frac{1}{2}$, $\frac{10}{3}$ 6. -1 7. $-\frac{1}{4}$
 8. 2 9. $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ 10*. $\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 11*. $4 \sin x \cdot \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}) \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})$ 12. $\sin 10^\circ$ 13. Упатство: стави $1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

Решение: $\sqrt{2} \operatorname{tg} x \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 27. $x_1 = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$; $x_2 = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ 28. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ 29. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

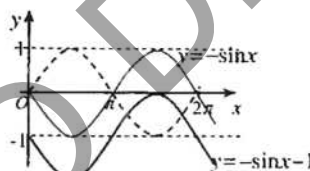
30. $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 31. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

32* Упатство. Користи ги формулите: $\cos x + 1 = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ и $\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

Решение. $x_1 = k\pi$, $x_2 = (2k+1)\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

33. $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

34. (црт.1)



црт.1

35. (црт.2) I начин:

амплитуда: 3 $\Rightarrow$

$-3 \leq y \leq 3$; период:

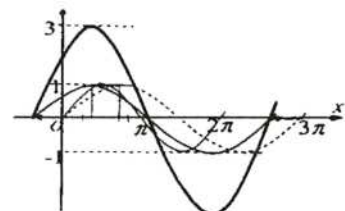
$$T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3\pi; \text{ поместување: } -\frac{c}{b} = -\frac{4}{-\frac{2}{3}} = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \text{налево за } \frac{3\pi}{8}$$

II начин. Карактеристични вредности на функцијата (во основниот интервал):

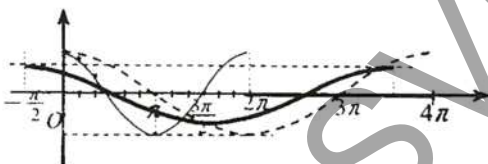
нули: $\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} = 0$, $\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} = \pi$, $\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} = 2\pi \Rightarrow$

$x_1 = -\frac{3\pi}{8}$, $x_2 = \frac{9\pi}{8}$, $x_3 = \frac{21\pi}{8}$; максимум: $\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$x_{\max} = \frac{3\pi}{8}$; минимум: $\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_{\min} = \frac{15\pi}{8}$



црт.2



црт.3

36. Решение (црт.3). период: $T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{1}} = 4\pi$; амплитуда: $a = \frac{3}{4}$; поместување:

$-\frac{c}{b} = -\frac{4}{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{2}$; нули: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{5\pi}{2}$; max во: $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{7\pi}{2}$; min во $x = \frac{3\pi}{2}$;

37. $\gamma = 64^\circ 28'$. $a = 78.576$. $b = 134.38$ 38. $\beta = 115^\circ 42' 46''$; $\gamma = 15^\circ 1' 50''$; $a = 399.94$

39. $\alpha = 114^\circ 45' 56''$; $\beta = 35^\circ 19' 36''$; $\gamma = 29^\circ 54' 28''$

41. Упатство: $\sin \alpha = n \sin \beta$, каде n е индексот на рефлексија (црт.4) Решение: $b = 40^\circ 30' 20''$ 42. $r = 2.7$;

$R = 7.5$. 43. $P \approx 45$ 44. $d_1 = 7$, $d_2 = 1$ $\odot \sqrt{3}$



црт.4

ТЕМА 3

3.1.1.

1. а) 1°. За $n = 1$ тврдењето е точно, бидејќи $1 = 1^2 = 1$.

2°. Да претпоставиме точност за $n = k$, т.е. нека важи: $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$

Сега за да докажеме дека тврдењето е точно за $n = k + 1$, на левата и десната страна од последното равенство додаваме $2k + 1$, притоа добиваме:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1, \text{ од каде имаме:}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2, \text{ што требаше и да се докаже.}$$

9. а) 1°. За $n = 1$ тврдењето е точно, бидејќи $6^2 - 1 = 35$, а бројот 35 е секако делив со самиот себе.

2°. Да претпоставиме точност за $n = k$, т.е. нека важи: $35 \mid 6^{2k} - 1$, значи $6^{2k} - 1 = 35a$, ($a \in \mathbb{N}$).

Сега да докажеме дека тврдењето е точно за $n = k + 1$, притоа имаме:

$$6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k+2} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 1 = 35 \cdot 6^{2k} + (6^{2k} - 1) = 35 \cdot 6^{2k} + 35a = 35(6^{2k} + a), \text{ значи } 35 \mid 6^{2(k+1)} - 1.$$

д) 1°. За $n = 1$ тврдењето е точно, бидејќи $6 \mid 1^3 - 1$.

2°. Да претпоставиме точност за $n = k$, т.е. нека важи: $6 \mid k^3 - k$, значи $k^3 - k = 6a$, ($a \in \mathbb{N}$).

Сега да докажеме дека тврдењето е точно за $n = k + 1$, т.е. треба да докажеме дека важи: $6 \mid (k + 1)^3 - (k + 1)$.

Ќе тргнеме од $(k + 1)^3 - (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 2k = 6a + k + 3k^2 + 2k = 6a + 3k + 3k^2 = 6a + 3k(k + 1) = 6a + 3 \cdot 2b = 6a + 6 = 6(a + b)$, каде $b \in \mathbb{N}$. Овде е користено тврдењето дека бројот 2 е делител на производ од кои било два последователни природни броја (можеш да го докажеш со математичка индукција). 10. а) 1°. За $n = 1$ тврдењето е точно, бидејќи $2^1 = 2 > 1$.

2°. Да претпоставиме точност за $n = k$, т.е. нека важи: $2^k > k$,

Сега да докажеме дека тврдењето е точно за $n = k + 1$, имено: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k = k + k > k + 1$, значи имаме: $2^{k+1} > k + 1$. 11. а) не, б) не.

3.1.2.

$$2. V_6^3 = 120; 3. V_4^2 - V_3^1 = 9; 4. 480; 5. 156; 6. 600; 7. n = 11; 8. k = 6; 9. a) \sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{5} = 671, 6) 750; 10. \sqrt[13]{3} = 1594323$$

3.1.3.

2. а) $4 \cdot 3! = 24$, б) $4! \cdot 24 = 576$; 3. $6! - 5! = 600$; 4. Од $P_n : P_{n+2} = 0,1 : 3$, имаме: $n! : (n+2)! = 0,1 : 3$, т.е. $3 \cdot n! = 0,1 \cdot (n+2)(n+1)n!$, од каде $n^2 + 3n - 28 = 0$, $n = 4$; 5. Трите комплети книги (по боја) можеш да ги распоредиш на $3! = 6$ начини. А, можеш и самите книги во комплетот да ги пермутираш (разместиш) меѓусебе на $2! \cdot 5!$, односно $3!$ начини. Значи решението е $6 \cdot 2! \cdot 5! \cdot 3! = 8640$ начини; 6. Тоа можеш да го направиш на $P_{10}(3,2,5) = 2520$ начини; 7. $P_{10}(2,2,2,2) = 226800$; 8. $P_7(3,2,2) = 210$; 9. Треба од вкупниот број пермутации да ги одземеш пермутациите што започнуваат со 0, $P_6(3,2) - P_5(2,2) = 60 - 30 = 30$; 10. а) $P_8(4,3) = 280$, б) $P_8(5,2) = 168$, в) $P_8(5,3) = 56$.

3.1.4.

$$2. C_9^5 = 126. 3. C_{12}^2 - 12 = 54. 4. 21. 5. C_{10}^2 = 45. 6. C_8^2 - 2 \cdot 5 = 18. 7. C_{16}^1 \cdot C_{20}^3 + C_{16}^2 \cdot C_{20}^2 + C_{16}^3 \cdot C_{20}^1 + C_{16}^4 = 54\,060. 8. C_{39}^7 = 15\,380\,937. -12 = 54. 9. \bar{C}_8^5 = 792. 10. \bar{C}_n^2 = n + 15, n = 6.$$

3.1.5.

1. а) $2^{10} = 1024$, б) 0; 2. а) $243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5$, б) $16x^4 - 160x^3 + 600x^2 - 1000x + 625$,
 в) $x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$, г) $x^8 + 8x^7\sqrt{y} + 28x^6y + 56x^5y\sqrt{y} + 70x^4y^2 + 56x^3y^2\sqrt{y} + 28x^2y^3 + 8xy^3\sqrt{y} + y^4$;
 3. $\binom{7}{4}(\sqrt{x})^3(\sqrt{y})^4 = 35xy^2\sqrt{x}$; 4. $7392x^6$; 5. $T_5 = 1120x^4y^4$; 6. $29568x^6y^5$ и $14784x^5y^6$; 7. $T_7 = 28x^5$. 8. 84;
 9. Деветтиот; 10. $n=11$.

3. 2. 2.

1. $\Omega = \{(g,g,g), (g,g,p), (g,p,g), (p,g,g), (g,p,p), (p,g,p), (p,p,g), (p,p,p)\}$, поволни елементарни настани за настанот A се $\{(g,g,p), (g,p,g), (p,g,g)\}$; 2. $\Omega = \{(g,1), (g,2), (g,3), (g,4), (g,5), (g,6), (P,1), (P,2), (P,3), (P,4), (P,5), (P,6)\}$ 3. $\Omega = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$, поволни елементарни настани за настанот A се $\{(1,3), (1,5), (3,1), (3,5), (5,1), (5,3)\}$;
 4. а) $\{(b_1, c_1, s), (b_2, c_1, s), (b_1, c_2, s), (b_2, c_2, s)\}$, б) $\{(b_1, c_1, c_2), (b_2, c_1, c_2), (c_1, c_2, s)\}$; 5. $A = \{(i,n,n), (n,i,n), (n,n,i)\}$, $B = \{(i,n,n), (n,i,n), (n,n,i), (i,i,n), (n,i,i), (i,n,i), (i,i,i)\}$, $C = \{(i,i,n), (n,i,i), (i,n,i)\}$, $D = \{(i,i,n), (n,i,i), (i,n,i), (i,i,i)\}$.
 6. $A = \{1,3,5\}$, $B = \{3,6\}$, $\bar{A} = \{2,4,6\}$, $\bar{B} = \{1,2,4,5\}$, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cup B = \{1,3,5,6\}$, $A \cap B = \{3\}$ и $\bar{A} \cap \bar{B} = \{2,4\}$. 7. $A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$, $B = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$, $C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$, $A \cap B = \{(2,6), (4,4), (6,2)\}$, $A \cap C = \{(2,2), (4,4), (6,6)\}$, $B \cap C = \{(4,4)\}$, $B \cup C = \{(1,1), (2,2), (2,6), (3,3), (3,5), (4,4), (5,3), (5,5), (6,2), (6,6)\}$. 8. $A = \{3,4,5,6\}$, $B = \{2,3,4\}$, $A \setminus B = \{5,6\}$.

3. 2. 3.

1. $\frac{4}{10}$; 2. $\frac{3}{8}$; 3. $\frac{12}{100}$ (овде не се земени предвид степените со основа 4 и 8 затоа што тоа се истовремено степени со основа 2, како и оние со основа 9 кои се истовремено степени со основа 3); 4. $\frac{1}{8}$; 5. а) $\frac{1}{4}$, б) $\frac{2}{4}$, в) $\frac{1}{4}$; 6. $\frac{5}{36}$; 7. Бројот на сите можности е $n = \nabla_6^2 = 6^2 = 36$. Ако со A го обележиме настанот чија веројатност се бара, тогаш $\bar{A}$ ќе биде спротивниот настан (бројот 6 да не се појави ниту еднаш). Поволни настани за $\bar{A}$ се варијации со повторување од елементите 1,2,3,4,5 од втора класа, затоа $P(\bar{A}) = \frac{25}{36}$, тогаш $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} = 0,306$; 8. $P(A) = \frac{C_{13}^5}{C_{20}^5} = 0,083$;
 9. Бројот на сите можности се комбинации од 10 елементи трета класа, додека поволни настани ќе бидат: извлечени се три бели или три црни топчиња, чиј број е $C_6^3 + C_4^3$, затоа бараната веројатност ќе биде $P(A) = \frac{20+4}{120} = 0,2$; 10. Бројот на сите можности се комбинации од 18 елементи втора класа, додека поволни настани се: извлечено е едно бело и едно црвено топче, затоа бројот на поволни настани ќе биде $C_3^1 \cdot C_7^1$, а бараната веројатност $P(A) = \frac{21}{153} = 0,13725$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ 3.

1. а) За $n = 1$ равенството е точно, бидејќи $1 = 1(2-1)$. Да претпоставиме точноста за $n = k$, т.е. нека важи: $1 + 5 + 9 + \dots + (4k-3) = k(2k-1)$. Сега треба да докажеме точноста за $n = k+1$, затоа додаваме $(4k+1)$ од двете страни на равенството и добиваме: $1 + 5 + 9 + \dots + (4k-3) + (4k+1) = k(2k-1) + (4k+1)$. Десната страна можеме да ја трансформираме на следниов начин: $k(2k-1) + (4k+1) = 2k^2 + 3k + 1 = (k+1)(2k+1) = (k+1)(2k+2-1) = (k+1)(2(k+1)-1)$, што требаше и да се докаже. 2. а) За $n = 1$ равенството е точно, бидејќи $9 \mid 18$, од претпоставката дека $9 \mid (7^k + 3k + 8)$, следува дека $7^k + 3k + 8 = 9a$, $a \in \mathbb{N}$. Треба да докажеме дека: $9 \mid (7^{k+1} + 3(k+1) + 8)$, затоа да тргнеме од $7^{k+1} + 3(k+1) + 8 = 7 \cdot 7^k + 3k + 3 + 8 = 7 \cdot (9a - 3k - 8) + 3k + 3 + 8 = 7 \cdot 9a - 21k - 56 + 3k + 11 = 7 \cdot 9a - 18k - 45 = 9(7a - 2k - 5) \Rightarrow 9 \mid (7^{k+1} + 3(k+1) + 8)$, што требаше да се докаже. 3. а) За $n = 1$ равенството е точно, бидејќи $3^1 \geq 2 + 1 = 3$. Да претпоставиме точноста за $n = k$, т.е. нека важи: $3^k \geq 2k + 1$. Треба да докажеме дека неравенството е точно и за $n = k+1$, т.е. дека важи: $3^{k+1} \geq 2(k+1) + 1$. Притоа: $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geq 3 \cdot (2k+1) = 6k+3 = 2k+2+1+4k \geq 2(k+1) + 1 + 4k > 2(k+1) + 1$, ш.т.д. 4. -50. 5.а) 9; б) 11. 6. а) $\frac{n!}{(n+1)!-n!} = \frac{n!}{(n+1) \cdot n! - n!} = \frac{1}{(n+1)-1} = \frac{1}{n}$; б) $\frac{n+1}{n+2}$. 7.а) 30; б) 0; в) 375. 8.а) 7;

б) 8. 9. 4, бидејќи $V_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1) \Leftrightarrow (x+1)x(x-1) + \frac{(x+1)!}{(x-1)!(x+1-(x-1))!} = 14(x+1) \Rightarrow 2x^2 - x - 28 = 0$,

чиј решенија се: $x_1 = -\frac{7}{4}$ и $x_2 = 4$, првото решение отпаѓа (зошто?). 10. 6. Сидејќи $9V_x^3 = 5V_x^3 \Leftrightarrow$

$9x(x-1)(x-2) = 5x^3$, оттука ја добиваме квадратната равенка $4x^2 - 27x + 18 = 0$. Само решението $x = 6$ на равенката е решение на задачата, (зошто?). 11. $2 \cdot 3! = 12$. 12. а) $6!$; б) $5!$. 13. $V_3^{12} = 3^{12}$ ($n = 3$, имено 0 бодови за изгубена средба, 1 бод за нерешено и 2 бода за победа). 14. 24, тоа се варијации без повторување од втора класа (патувања меѓу две станици): $V_n^2 = 552 \Rightarrow n(n-1) = 552 \Rightarrow n^2 - n - 552 = 0$

$\Rightarrow n = 24$. 15. а) $C_9^2 = \binom{9}{2} = 36$ прави, б) $C_9^3 = \binom{9}{3} = 84$ триаголници, в) $C_9^4 = \binom{9}{4} = 126$ тетраедри.

16. $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = 2520$. 17. $32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$. 18. $-\binom{10}{7} 2^{13} x^8 \sqrt{2x}$.

19. $\binom{16}{8} x^{-4}$. 20. Кој било член во развојот на дадениот бином може да се запише како:

$\binom{9}{k} \cdot (\sqrt{x})^{9-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \binom{9}{k} x^{\frac{9-k}{2}} x^{-\frac{k}{3}} = \binom{9}{k} x^{\frac{18-3k}{6}}$, според условот на задачата треба $18-3k = 0$, значи $k = 6$.

21. а) $P(A) = \frac{1}{V_5^3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; б) $P(B) = \frac{1}{V_5^3} = \frac{1}{125}$; в) $P(C) = \frac{V_5^3}{V_5^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{5^3} = \frac{12}{25}$. 22. $P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^2} = \frac{4 \cdot 4}{1326} = 0.012$.

23. Спротивниот настан $\bar{A}$ е настанот дека одеднаш ќе извлечеш две сини топчиња, чија веројатност е $P(\bar{A}) = \frac{C_7^2}{C_{24}^2} = \frac{21}{276} = \frac{7}{92}$; тогаш $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{92} = \frac{85}{92} = 0.9239$. 24. Од 5 отсе кои 3 можат да се

изберат на C_5^3 начини. Триаголник може да се формира само од тројките (2,4,5), (4,5,7), (4,7,9) и (5,7,9) (зошто?). Затоа $P(A) = \frac{4}{\binom{5}{3}} = \frac{4}{10} = 0.4$.

25. $P(A) = \frac{\binom{85}{3}}{\binom{100}{3}} \approx 0.61$. 26. 207, бидејќи $P(A) = 0.90$, $n = 230$, тогаш $\frac{m}{n} = 0.90$, од каде $m = 0.90 \cdot 230 = 207$.

ТЕМА 4

4.1.1.

2. $\overline{M_2M_1} = 5$ 3. $M'(-4)$ 4. $\overline{OA} = (0,1)$, $\overline{OB} = (-2,-7)$, $\overline{OC} = (-4,5)$, $\overline{OD} = (-8,0)$ 5. $A(1,-2)$, $B(0,7)$ итн.
 7. а) $5\vec{i}$ и $-9\vec{j}$; б) $-7\vec{i}$ и $-0\cdot\vec{j}$; в) $0\vec{i}$ и $\frac{2}{3}\vec{j}$ 8. а) $\vec{a} = (-4,5)$ б) $\vec{b} = (1,1)$ в) $\vec{c} = (0,-5)$
 9. а) $B(-2,1)$ б) $B(0,2)$ в) $(0,2)$

4.1.2.

1. а) да; б) да. 2. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = -3\vec{i} + 11\vec{j}$ 3. а) $m = 8$, $n = 1$; б) $m = -1$, $n = 3$ 4. $\vec{c} = (9,-11)$, $\vec{d} = (7,5)$
 5. $\vec{a} = (-17,2)$ 6. а) $3\vec{a} + 2\vec{b} - 5\vec{c} = -18\vec{i} - 23\vec{j}$; б) $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = 14\vec{i} - 11\vec{j}$ 7. $\alpha = -4$, $\beta = -3$
 8. $\vec{b} = 3\vec{a} = (12,-2)$

4.1.3.

1. а) 5; б) $\sqrt{34}$; в) 5. 2. 10; $3\sqrt{5}$; 13. 3. $B_1(13,2)$, $B_2(7,2)$. 4. $M(0,1)$. 5. Точките се колинеарни.
 6. $(-3,5)$ и $(-6,5)$ или $(-3,-1)$ и $(-6,-1)$. 7. $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = \sqrt{197}$, $\overline{CD} = 2\sqrt{26}$, $\overline{AD} = \sqrt{149}$, $\overline{AC} = \sqrt{153}$,
 $\overline{BC} = 15$. 8. а) Паралелограм; другите не се.

4.1.4.

1. $M(3; 5,5)$. 2. а) $C(3,2)$; б) $C(-1, -\frac{3}{2})$. 3. а) $M(3,3)$; б) $M(9,3)$. 4. 5, $\frac{1}{2}\sqrt{37}$, $\frac{7}{2}$. 5. $(1, \frac{5}{4})$. 6. $D(9,6)$.
 7. $C(8,6)$, $D(4,2)$. 8. $T(\frac{8}{3}, \frac{7}{3})$, $\overline{OT} = \frac{1}{3}\sqrt{113}$. 9. $(-2,0)$ и $(2,3)$; 5. 10. $B(-9,7)$, $C(-9,-7)$, $D(9,-7)$ и $d = 2\sqrt{130}$. 11. $A(-5,7)$, $B(1,-3)$, $C(3,1)$. 12. $T(-1,0)$, $C(0,2)$. 13. Упатство: направи цртеж, па ќе уочиш кои се паралелни и ќе добиеш $\overline{AB} = 5\sqrt{10}$, $\overline{CD} = \sqrt{10}$ итн.

4.2.1.

1. а) $y = x + 2$; б) $y = -\sqrt{3}x - 3$. 2. $k = \frac{3}{4}$. 3. а) $\alpha = 150^\circ$; б) $\alpha \approx 21^\circ 48'$; в) $\alpha = 0^\circ$; г) $\alpha = 90^\circ$.
 4. Точките А и В, додека точката С не лежи. 5. $A(8,0)$, $B(0,6)$. 6. $k = 2$. 7. $k = 3$.
 8. Упатство: најнапред реши го системот $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$, при што пресечната точка е $M(1,1)$.
 Коэффициентот на правецот е -2 , па бараната права ќе биде $y = -2x + n$; но правата минува низ точката $M(1,1)$, затоа $1 = -2 \cdot 1 + n \Leftrightarrow n = 3$, тогаш $y = -2x + 3$ односно $2x + y - 3 = 0$.
 9. Решение: Равенката на правата што минува низ точката $A(a,b)$ и е паралелна со x -оската е $y = b$, во нашиот случај $y = -5$, а паралелна со y -оската $x = a$, значи $x = -4$.
 10. $5x - 3y + 17 = 0$. Упатство: нека $M(x,y)$ е точка од тоа множество точки, тогаш $\overline{MA} = \overline{MO}$ итн.
 11. $3x - 2y - 7 = 0$. 12. $k = \frac{1}{2}$, $\alpha = \arctg(-\frac{1}{6})$. 13. а) $\alpha \approx 63^\circ 26'$; б) $\alpha \approx 161^\circ 34'$; в) $\alpha \approx 120^\circ$

4.2.2

1. а) $x + y - 2 = 0$; б) $x - y + 8 = 0$; в) $y = \sqrt{3}x + (1 - 3\sqrt{3})$.
2. **Упатство:** равенката на бараната права ќе биде $y - 2 = k(x - 2)$, чии пресечни точки со координатните оски се $A(\frac{2k-2}{k}, 0)$ и $B(0, 2-2k)$, плоштината на триаголникот AOB (О-к.п.) е $\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} = 9$ итн. Правите се две и тоа: $x + 2y - 6 = 0$ и $2x + y - 6 = 0$.
3. $6x - 11y - 20 = 0$. 4. $y = 4x - 20$. 5. а) $x - y + 2 = 0$; б) $x + y - 1 = 0$; в) $2x - 3y - 2 = 0$.
6. а) $AB: 5x - 2y - 4 = 0$. $AC: y + 11x - 25 = 0$. $BC: 16x - y - 56 = 0$;
а) $2x + y - 7 = 0$. $7x - y - 20 = 0$, $x = 3$.
7. **Упатство:** најнапред најди ја пресечната точка на дадените прави, решавајќи го системот:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$
Негово решение е подредениот пар $(4, -1)$. Потоа доаѓаме до равенка на права низ две точки која гласи $x + y - 3 = 0$. 8. $A(-7, 0)$, $B(0, \frac{7}{3})$. 9. $5x - 2y - 17 = 0$. **Упатство:** најнапред одреди ги координатите на пресекот на дијагоналите на паралелограмот, а потоа координатите на темето B . 10. $3x + 2y - 24 = 0$. 11. а) не лежат; б) лежат. 12. $p = 7$, $q = -2$.

4.2.3

1. а) $2x + 3y - 6 = 0$; б) $3x - 4y + 12 = 0$; в) $5x - 12y - 30 = 0$; г) $3x - 2y + 6 = 0$. 2. а) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$;
б) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{2} = 1$; в) $\frac{x}{\frac{10}{3}} + \frac{y}{\frac{2}{5}} = 1$. 3. а) $k = -1$; б) $k = -2$; в) $k = \frac{1}{2}$. 4. а) $a = 2$; б) $a = -\frac{4}{3}$. 5. $\lambda = \frac{2}{5}$. 6. $a = \frac{4}{9}$.
7. $a = -\frac{4}{11}$. 8. $5x + 3y - 30 = 0$. 9. $x + y - 1 = 0$. 10. $\frac{x}{-8} + \frac{y}{9} = 1$; $\frac{x}{-8} + \frac{y}{-9} = 1$; $\frac{x}{8} + \frac{y}{-9} = 1$.
11. 6 кв.ед.

4.2.4

1. а) $M(1, 1)$; б) немаат заеднички точки бидејќи $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} \neq \frac{-4}{-17}$, правите се паралелни; в) $M(1, 2)$.
2. $y + 2x - 3 = 0$. 3. $x + 23y - 18 = 0$, $49x + 7y - 82 = 0$. 4. $m_1 = -3$, $m_2 = 3$. 5. $m_1 = -4$, $m_2 = 4$.
6. $m = -\frac{23}{136}$. 7. 120° . 8. **Упатство:** коефициентот на правецот на првата права е $\frac{1}{2}$, а втората права зафаќа агол од 90° со x -оската, па $\varphi = 90^\circ - \arctg \frac{1}{2} \approx 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$. 9. 90° . 10. 90° .
11. $\alpha = \beta = 45^\circ$, $\tau = 90^\circ$. 12. $7x + 3y - 11 = 0$.

4.2.5.

1. Паралелни се: б) и г), нормални се: а) и в), б) и д), г) и д). 2. $A=2$, $B=-1$, $C=5$ т.е. $2x - y + 5 = 0$.
 3. $6\frac{23}{65}, 6\frac{41}{65}$. 4. $m=0$. 5. $y = -\frac{1}{3}x$. 6. $8x - 5y + 1 = 0$. 7. $2x + y - 7 = 0$. 8. $(-1, 5)$ и $(4, 0)$.
 9. а) $m = -4$, $n \neq 2$ или $m = 4$, $n \neq -2$; б) за $m = 0$ и n произволно. 10. а) $2x + y - 4 = 0$; б) $6x - 5y + 4 = 0$.
 11. $2x + y + 20 = 0$ или $x - 2y - 15 = 0$. 12. $M(1, 1)$.

4.2.6.

1. а) $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - 5 = 0$; б) $x\sqrt{3} + y - 24 = 0$; в) $x\sqrt{3} - y - 20 = 0$. 2. а) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{7}{5} = 0$;
 б) $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$; в) $\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \sqrt{5} = 0$. 3. Упатство: види го решениот пример 4. Не.
 4. а) $\frac{2x-3}{2} = 0$ или $x - \frac{3}{2} = 0$; б) $\frac{4y+5}{-4} = 0$ или $-y - \frac{5}{4} = 0$. 5. а) $\frac{3x}{\sqrt{34}} + \frac{5y}{\sqrt{34}} - \frac{15}{\sqrt{34}} = 0$;
 б) $\frac{-7x}{\sqrt{65}} + \frac{4y}{\sqrt{65}} - \frac{28}{\sqrt{65}} = 0$; в) $\frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} + \frac{12}{5} = 0$. 6. а) $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13} = 0$; б) $\frac{8}{17}x - \frac{15}{17} = 0$. 7. а) 1; б) 11.

4.2.7

1. а) 2; б) 3; в) 5. 2. а) $d = 3$. 3. $N_1(3, 5)$, $N_2(-37, 45)$. 4. $4x - 3y - 26 = 0$ или $3x + 4y - 32 = 0$.
 5. а) $\frac{198}{\sqrt{97}}, \frac{99}{\sqrt{13}}, \frac{22}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{28}{5}, \frac{28}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{2}}$. 6. $3x + 4y + 12 = 0$. 7. $7x - 3y + 15 = 0$ и $3x + 7y - 93 = 0$.
 8. Упатство: најди ги растојанијата од точките до правата, без апсолутна вредност. Ако се со различни знаци лежат во различните полурамнини, во спротивно во иста полурамнина. Во нашиот случај точките се во различни полурамнини.
 9. $77x + 99y + 3 = 0$ и $9x - 7y - 79 = 0$. 10. $m = 24$ и $a = -146$. 11. $P = 6$ кв. единици.
 12. Упатство: потсети се дека центарот на впишаната кружница во триаголник е пресечната точка на симетралите на аглиите. Во нашиот случај центарот е $O(-1, \frac{1}{3})$ и $r = \frac{11\sqrt{5}}{15}$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ (4.1 и 4.2)

1. Во првиот и вториот квадрант и се симетрични во однос на y -оската. 2. $A'(4, 2)$. 3. $M'(2, 3)$.
 4. Точката е $B'(-2, -5)$. 5. а) $M'(6, 5)$; б) $M'(-6, -5)$. 6. $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$.
 7. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $|\overrightarrow{AB}| = 5$. 8. $(\vec{a} + \vec{b})(5, 6)$, $(\vec{a} - \vec{b})(1, -2)$, значи $(5, 6)$ и $(1, -2)$. 10. $\vec{x}(12, -1)$. 11. $(6, -1)$.
 12. $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. 14. а) 13; б) 5; в) 10. 15. $M(0, -\frac{25}{4})$. 16. $M(2, 5; 2, 5)$. 17. $P = 34$ кв.ед. 18. $O(3, -2)$, $R = 10$. 19. Правоаголен. 20. $M(6, \frac{27}{4})$. 21. а) $M(13\frac{4}{5}, -6)$. 22. $T(2, 1)$. 23. $D(2, 1)$. 24. $N(-2, 0)$, $N_1(2, 3)$. 25. 15, 10, $5\sqrt{13}$. 26. 2а. 28. а) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$, б) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 8$, в) $y = -\sqrt{3}x - 5$.

29. а) $y - 5 = 0$, б) $y + 3 = 0$. 30. а) $k = 3, n = -5$; б) $k = 2, n = \frac{1}{7}$; в) $k = \frac{1}{2}, n = -3$. 31. а) $y = 2x + 12$;
 б) $y = 7x - 7$. 32. а) $x - 8 = 0$; б) $x + 4 = 0$. 33. $m = -\frac{1}{2}$. 34. $m = 3$. 35. а) $m = n = -4$; б) $m = -\frac{1}{2}$.
 36. $x + 3y - 2 = 0$. 37. $y + 4x - 26 = 0$. 38. $3y - 2x - 9 = 0$. 39. $m_1 = 1, m_2 = \frac{59}{49}$. 40. а) $L = \sqrt{13} + \sqrt{53} + 4\sqrt{2}$;
 б) $5, \frac{\sqrt{157} \cdot \sqrt{37}}{2}$. 41. $4x - y + 5 = 0, x + y + 5 = 0, y + 3 = 0, O(-2, -3)$. 42. а) $\operatorname{tg} \alpha = -7, \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \tau = 2$;
 б) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{\pi}{4}, \tau = \frac{\pi}{2}$. 43. $m = \frac{5}{2}, m = -10$. 44. $m = -1, n = \frac{1}{3}$. 45. Упатство: најпрво
 најди ги равенките на правите кои ги содржат страните на триаголникот, тие се:
 $y = \frac{6}{5}x, y = -\frac{4}{9}x + \frac{38}{9}$ и $y = -\frac{5}{2}x + \frac{19}{2}$, а потоа растојанијата од секое теме до спротивната страна.
 46. $x - 3y + 9 = 0$. 47. $8y - 15x - 156 = 0, 4y - 3x - 60 = 0$. 48. $M'(-1, 0)$.
 49. Упатство: Точката во која се одбива зракот од x -оската е пресекот на дадената права т.е.
 $M(6, 0)$. Равенката на правата по која се одбива зракот е $l: y = -\frac{2}{3}x + 4$. 50. Упатство: а) бараната
 права запиши ја во експлицитен вид $l: y = kx + n$, па бидејќи се паралелни следува $k_p = k_l = 2$
 итн. а) $2x - y - 2 = 0$ и $2x - y - 12 = 0$; б) $2x + y + 4 = 0$ и $2x + y - 6 = 0$.
 51. $4x - 5y - 20 = 0, 3y + 10 = 0$. 52. Упатство: нека $M(x, y)$ е точка од г.м.т, тогаш
 $\overline{MA} = \overline{MB} \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \Rightarrow x - y = 0$. 53. $14x + 112y - 455 = 0$ и $64x - 8 - 195 = 0$.
 54. Упатство: напиши ги равенките на двете симетрали. Потоа земи произволна точка на едната
 права и најди го растојанието до двете симетрали (направи скица). Лесно ќе уочиш која е
 симетралата на остриот агол, а таа е $x + y - 3 = 0$. 55. $3x - 4y + 24 = 0, 5x - 12y + 16 = 0$.

4.3.1.

1. а) Точка; б), в), г) и д) кружници. 2. а) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; г) $x^2 + y^2 = 4$; д) $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 4$
 и другите исто. 3. $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 44 = 0$. 4. а) $p = 5, q = -6, r = 12$; б) $p = 7, q = 0, r = 3$;
 в) $p = \frac{1}{2}, q = 1, r = 2$; г) $p = 0, q = 3, r = 4$. 5. а) $(x-2)^2 + y^2 = 4$; б) $x^2 + (y+3)^2 = 16$;
 г) $(x-\frac{9}{4})^2 + (y+\frac{10}{3})^2 = \frac{49}{4}$. 6. $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$. 7. Упатство: направи цртеж и ќе уочиш дека
 $p=r$. Одговор: $k_1 = 10, k_2 = -2$. 8. Упатство: види го решениот пример 4. Одговор:
 $k_1 = 4, k_2 = 0$. 9. Решение. Центарот $S(p, p)$, и $r=p$ т.е. $p=q=r$, па равенката на кружницата ќе биде
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$. Но правата $3x + 4y - 5 = 0$ од центарот S е оддалечена за r т.е.
 $r = \frac{|3r+4r-5|}{5} \Rightarrow 5r = \pm(7r-5)$, од каде $r_1 = \frac{5}{2}, r_2 = \frac{5}{12}$. Равенките на кружниците се:
 $(x-\frac{5}{2})^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$ и $(x-\frac{5}{12})^2 + (y-\frac{5}{12})^2 = \frac{25}{144}$ (овој вид задачи, подоцна ќе ги решаваш и на друг начин).
 10. Упатство: користи го решението на претходната задача, дека растојанијата r од центарот $S(p, q)$
 на кружницата до секоја од трите прави се еднакви меѓусебе. Одговор:
 $(x+\frac{17}{6})^2 + (y+\frac{19}{6})^2 = \frac{5}{4}, (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

11. Упатство: потсети се на решавање на систем равенки со две непознати, од кои едната е линеарна, а другата квадратна. Одговор: $M_1(1,2)$ и $M_2(\frac{56}{5}, -\frac{7}{5})$. **12. Упатство.** испитај ги решенијата, во зависност од дискриминантата на квадратната равенка што се добива.

4.3.2

1. а) $M_1(0,2)$ и $M_2(2,6)$; б) Правата и кружницата немаат заедничка точка. 2. $M_1(-2,0), M_2(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$.
 3. $K: (x - \frac{3}{2})^2 + (y - 8)^2 = \frac{25}{4}$. 4. Упатство: центарот S има еднакви координати кои се еднакви и на радиусот, т.е. $S(r,r)$, па тогаш е $r = \frac{|3r + 4r - 5|}{5} \Leftrightarrow 5r = \pm(7r - 5)$ итн. $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$ и $(x - \frac{5}{12})^2 + (y - \frac{5}{12})^2 = \frac{25}{144}$. 5. Упатство: Центарот во тој случај ги има координатите $|p| = r, q = 0$, потоа користи го решението на претходната задача. Одговор: $(x - \frac{13}{4})^2 + y^2 = \frac{169}{16}$ и $(x - \frac{13}{9})^2 + y^2 = \frac{169}{81}$. 5. $(x - \frac{7}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$ и $(x - \frac{11}{6})^2 + (y + \frac{23}{6})^2 = \frac{5}{4}$. 7. $(x - \frac{5}{14})^2 + (y - \frac{23}{14})^2 = \frac{1}{4}$ и $(x - \frac{10}{23})^2 + (y - \frac{136}{63})^2 = \frac{196}{3969}$. 8. $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 169$. 9. а) $m = 9$ и $m = 11$; б) $m \in (-9, 11)$; в) $m \in (-\infty, -9) \cup (11, +\infty)$. 10. $a = \pm\sqrt{5}$. 11. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{36}{25}$.

4.3.3.

1. а) $2x + y - 7 = 0$; б) Упатство: $T \in K$, тогаш ординатата на T ја наоѓаш од равенката $(-2 - 1)^2 + (y - 2)^2 - 10 = 0$, т.е. $y^2 - 4y + 3 = 0$, од каде $y_1 = 2, y_2 = 3$, па $T(-2, 3)$, $3x - y + 9 = 0$; в) $2x - y - 5 = 0$. 2. а) $2x + y - 5 = 0$; б) $3x - y + 10 = 0$; в) $2x - y - 10 = 0$; г) $x - y + 6 = 0$.
 3. $x + 2y - 18 = 0$. 4. $A(1, 11), B(-4, 4), C(5, -1)$. 5. $\varphi = 45^\circ$. 6. $t_1: 3x + 2y - 6 = 0, t_2: 3x - 2y - 60 = 0$.
 7. $2x + y - 5 = 0$ и $2x + y + 5 = 0$.

4.3.4.

1. Упатство: од дадените елементи добиваш $a = 15, c = 9$, а од малата полуоска

$b^2 = a^2 - c^2 = 225 - 81 = 144$. Одговор: $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$. 2. Упатство: види го решениот пример 3,

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. 3. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. 4. Упатство: види го решениот пример 6. Одговор: $\frac{9x^2}{145} + \frac{y^2}{16} = 1$.

5. а) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. 6. а) Решение: бидејќи на точките $M(2, 1)$ и $N(1, 2)$ координатите ја

задоволуваат равенката на елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1)$ т.е. $4b^2 + 0 \cdot a^2 = a^2b^2 \Rightarrow a^2 = 4$

и $1 \cdot b^2 + 4a^2 = a^2 b^2 \Rightarrow b^2 = 16$. па $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. 7. $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $2p = \frac{8}{3}$. 8. Упатство: прво состави ја равенката на елипсата според дадените елементи која гласи $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$. $A_1(-15,0)$, $A_2(15,0)$, $B_1(0,12)$, $B_2(0,-12)$, $F_1(-9,0)$ и $F_2(9,0)$. 9. Упатство: ако е дадена точка $M(x_1, y_1)$ и елипсата $E: b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, тогаш $b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2$ може да биде поголемо, еднакво или помало од нула, па точката M е надвор, лежи на елипсоат, е внатрешна точка на елипсата. Одговор: а) $M \in E$; б) таа е надворешна точка; в) внатрешна точка. 10. $P=24$ м. 11. Упатство: ако малата оска од фокусите се гледа под прав агол, тогаш $b=c$. Со решавање на системот $\begin{cases} a=\sqrt{6} \\ \sqrt{a^2-b^2}=b \end{cases}$, се добива $a^2 = 6$ и $b^2 = 3$, па $E: 3x^2 + 6y^2 = 18$. 12. (a.b), (-a.b), (-a.-b), (a.-b), направи цртеж. 13. $M_1(0,-6), M_2(5,4;4,8)$.

4.3.5.

1. а) $M_1(\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$ и $M_2(-\frac{2}{3}, -\frac{8}{3})$; б) $M(3,0)$ - допирна точка; в) $l \cap E = \emptyset$. 2. а) $l \cap E = \{M\}$ и $M(3,3)$; б) $l \cap E = \{M_1, M_2\}$, при што $M_1(0,-6), M_2(5,4;8)$. 3. а) $|n| < 5\sqrt{2}$; б) $|n| = 5\sqrt{2}$; в) $|n| > 5\sqrt{2}$. 4. $k = \pm 1$. 5. а) $x^2 + 25y^2 = 25$; б) $3x^2 + 16y^2 = 48$. 6. $8x^2 + 17y^2 = 136$. 7. $a = 10, b = 5, D(8,3)$. 8. а) $y = 5, x + 4y - 25 = 0$; б) $x - 4y + 4 = 0, x + 2y + 4 = 0$. 9. $25x^2 + 225y^2 = 5625$. 10. Упатство: од равенка на правата, $k = -\frac{3}{2}$, а од равенката на елипсата имаме $a^2 = 10, b^2 = \frac{5}{2}$. Од условот за допир на права и елипса добиваме $n = \pm 5$, тогаш тангентите се $y = -\frac{3}{2}x \pm 5$. 11. Упатство: постапи како во претходната задача. $y = -\frac{1}{2}x \pm 2\sqrt{10}$.

4.3.6.

1. а) $3x + 4y - 24 = 0$; б) $9x - 20y - 75 = 0$; в) $16x - 15y + 100 = 0$. 2. а) $l: x + y - 5 = 0, n: x - y - 3 = 0$; б) $l: 3x - 10y + 25 = 0, n: 50x + 15y + 126 = 0$ в) $l: x + 2y - 8 = 0, n: 2x - y - 1 = 0$. 3. Упатство: равенката на нормалата во точката $T(x_1, y_1)$ е $y - y_1 = \frac{4y_1}{3x_1}(x - x_1)$. Таа треба да минува низ фокусот $F(1,0)$, тогаш се добива $0 - y_1 = \frac{4y_1}{3x_1}(1 - x_1)$, од каде $y_1 = 0$, што значи нормалата минува низ темето на елипсата кое лежи на x -оската. 4. $k = \pm \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 5. $n = \pm \frac{1}{2}$ 6. Да, нормалата е 7. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{45} = 1$. 8. а) $4x^2 + 25y^2 = 100$; б) $4x^2 + 225y^2 = 500$. 9. а) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{12} = 1$; б) $16x^2 + 25y^2 = 400$. 10. $M(-10,15)$.

4.3.7.

1. а) $4x^2 - 9y^2 = 144$; б) $16x^2 - 9y^2 = 144$; в) **Упатство:** користи дека $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ т.е.

$$\frac{\sqrt{64 + b^2}}{8} = \frac{5}{4}, \text{ од каде } b^2 = 36. \text{ Н: } \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1. \quad 2. \text{ а) } a = 3, b = 4, F_1(-5, 0), F_2(5, 0), y = \pm \frac{4}{3}x;$$

- б) $a = 4, b = 1, F_1(-\sqrt{17}, 0), F_2(\sqrt{17}, 0), y = \pm \frac{1}{4}x$. 3. **Упатство:** реши го системот
$$\begin{cases} 36a^2 - b^2 = a^2b^2 \\ 64a^2 - 8b^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

според непознатите a^2 и b^2 . Н: $32x^2 - 4y^2 = 148$. 4. а) **Решение:** Ако точката М од множеството

е меѓу двете гранки на хиперболата, лесно се доаѓа до заклучок дека е $\overline{MF_1} - \overline{MF_2} < 2a$, од каде

следува дека $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 < 0$ т.е. $b^2x^2 - a^2y^2 < a^2b^2$; б) Ако М е во една од гранките

на хиперболата, тогаш $\overline{MF_1} - \overline{MF_2} > 2a$, од каде следува дека $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 > 0$, т.е.

$b^2x^2 - a^2y^2 > a^2b^2$. 5. **Решение:** Равенката на хиперболата Н чии фокуси се на у-оската е

$$H: \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ или } H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \text{ каде што } b \text{ е реална, а } a \text{ имагинарна полуоска. Состави ги}$$

равенките $c = 50, b = 32$ и $a^2 = c^2 - b^2 = 1476$, значи $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{1476} = 1$. 6. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ или $x^2 - y^2 = 4$.

7. **Упатство:** види го решението на задачата 4. а) на хиперболата; б) во хиперболата; и в) надвор

од хиперболата. 8. **Упатство:** бидејќи $y = \pm \frac{b}{a}x$ е асимптота, тогаш $\frac{b}{a} = \lg 60^\circ$ итн. а) $x^2 - 3y^2 = 9$;

б) $3x^2 - y^2 = 36$. 9. **Упатство:** прво најди ги фокусите на елипсата $F_1(-4, 0)$ и $F_2(4, 0)$, тогаш

фокусите на хиперболата се $F_1'(-4, 0)$ и $F_2'(4, 0)$ итн. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. 10. а) $9x^2 - 16y^2 = 144$;

б) $25x^2 - 144y^2 = 3600$. 11. а) $M_1(-9, 0), M_2(-15, -8)$; б) $M_1(6, 2), M_2(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3})$.

4.3.8.

1. а) Немаат заеднички точки; б) Немаат заеднички точки; в) Се сечат; г) Правата е тангентата.

2. а) $T(5, -2)$; б) $T(2, 3)$; в) $T(4, 3)$; г) $T(10, 3)$. 3. а) $M_1(-2, 0)$ и $M_2(-\frac{10}{3}, -\frac{8}{3})$; б) $M_1(-\frac{25}{3}, 4)$, $M_2(-13, \frac{36}{5})$.

4. а) $|m| > \frac{9}{2}$; б) $|m| = \frac{9}{2}$; в) $|m| < \frac{9}{2}$. 5. $t_1: x - y - 1 = 0, t_2: 9x + 5y - 23 = 0$. 6. $t: 3x - 2y \pm 4 = 0$.

7. $t: 2x - y \pm 1 = 0$. 8. $8x^2 - 9y^2 = 72$. 9. $m = 4$. 10. $m = 2$.

4.3.9.

1. а) $t: x + y - 1 = 0$; б) $t: 7x + 4y - 1 = 0$; в) $t: x + y + 1 = 0$. 2. **Упатство:** определи ги пресечните точки (види го решениот пример 3). $t_1: x - y - 2 = 0, t_2: x - y + 2 = 0$. 3. $t: 15x + 8y + 54 = 0$.

4. **Упатство:** бидејќи $T \in l$, определи ја ординатата на точката Т. Н: $4x^2 - 16y^2 = 64$.

5. $t: 5x - 6y - 32 = 0, n: 6x + 5y - 75 = 0$. 6. $n: 4x + 9y - 48 = 0$. 7. $P(8, -5)$. 8. $x^2 - 4y^2 = 4$.

9. $\sqrt{3}x - y \pm \sqrt{15} = 0$; $D_1(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{15}}{5})$ и $D_2(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{15}}{5})$.

4.3.10.

1. а) $y^2 = 6x$; б) $y^2 = 16x$. 2. Упатство: од параболата $\Pi: y^2 = 8x$, добиваме дека $\frac{p}{2} = 2$ и $\sqrt{(x-2)^2 + 8x} = 10$, тогаш $x_1 = 8$, а $x_2 = -12$ не се зема предвид (зошто?), а за $y = \pm 8$, па $M_1(8, 8)$ и $M_2(8, -8)$. 3. а) $p = \frac{1}{5}, F(\frac{1}{10}, 0)$; б) в) $p = \frac{1}{4}, F(\frac{1}{8}, 0)$; г) $p = \frac{9}{2}, F(\frac{9}{4}, 0)$. 4. а) $y^2 = 16x$; б) $y^2 = -20x$; в) $y^2 = 3x$. 5. а) $p = 2, F(1, 0)$ $y^2 = 20x$; б) $y^2 = \frac{28}{3}x$; в) $y^2 = -10x$; г) $y^2 = -7x$. 6. а) $y^2 = \frac{25}{3}x$; б) $y^2 = -\frac{16}{3}x$; в) $y^2 = \frac{27}{7}x$. 7. а) M_1 лежи бидејќи $6^2 = 9 \cdot 4$. б) M_2 не лежи, бидејќи $5^2 < 9 \cdot 4$. в) M_3 не лежи бидејќи $7^2 > 9 \cdot 4$. 8. $M(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. 9. Упатство: определи ги најнапред фокусите на елипсата F_1, F_2 . Задачата има две решенија за параболите $y^2 = 16x$ и $y^2 = -16x$. 10. $y^2 = 12x$ и $y^2 = -12$. 11. $M_1(\frac{3}{2}, -3)$ и $M_2(2\frac{2}{3}, 4)$.

4.3.11.

1. а) се сечат, $M_1(\frac{3}{2}, -3)$, $M_2(2\frac{2}{3}, 4)$; б) се допираат $T(\frac{5}{2}, -5)$; в) немаат заедничка точка. 2. а) $\overline{M_1 M_2} = \frac{5}{6}\sqrt{5}$. Упатство: определи ги пресечните точки на правата и параболата, а потоа најди растојание меѓу две точки. б) $\overline{M_1 M_2} = 2\sqrt{13}$. 3. $MM_1: 4x - 5y + 12 = 0$. 4. а) тангентата е, со допирна точка $(1, 4)$; б) тангентата е, со допирна точка $(8, -4)$. 5. а) $t: 3x + 2y + 3 = 0$; б) $3x - 4y + 3 = 0$. 6. $t: x - y + 1 = 0$. 7. а) $m = -2$; б) $m = 1$; в) $m = 2$. 8. Упатство: правата l земи ја во експлицитен вид $l: y = kx + n$, но $P \in l$, па $8 = 6k + n$, а потоа користи го условот за допир на права и парабола. $t_1: x - y + 2 = 0$ и $t_2: x - 3y + 18 = 0$. 9. $y^2 = 85\frac{1}{3}x$. 10. Упатство: напиши ги равенките на двете тангенти од точката P на параболата Π , а потоа најди го аголот меѓу нив. а) $\varphi = 90^\circ$; б) $\varphi = 45^\circ$. 11. $t_1: 3x + y + 1 = 0$; $t_2: x - 3y + 27 = 0$.

4.3.12.

1. Упатство: од равенката на параболата определи ја ординатата y_1 . а) $t: 4x - 4y + 7 = 0$; б) $t: 4x - 2y + 5 = 0$; в) $t: 3x + 2y + 4 = 0$; г) $5x + 4y + 10 = 0$. 2. а) $T(\frac{8}{7}, -2)$; б) $T(20, -10)$; в) $T(4, -2)$; г) $T(\frac{3}{4}, 3)$. 3. а) $\alpha = 45^\circ$; б) $\alpha = 120^\circ$. 4. $M(\frac{11}{12}, -\frac{11\sqrt{3}}{6})$. 5. а) $n: 4x + 7 - 18 = 0$; б) $4x + y - 9 = 0$; в) $2x - 2y - 15 = 0$. 6. $P(-6, 1)$. 7. Упатство: види го решениот пример 4. $t_1: x + y + 2 = 0$ и $t_2: x - y + 2 = 0$. 8. $t_1: x + 3y + 15 = 0$ и $t_2: x - 3y + 15 = 0$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ 4.3

1. а) не лежи; б) лежи; в) лежи; г) не лежи. 2. а) $K: x^2 + y^2 = 9$; б) $K: x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$;
в) $K: 16x^2 + 16y^2 - 32x + 16y + 11 = 0$; г) $K: x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$.
3. $K_1: x^2 + y^2 + 8\sqrt{2}x + 4y = 0$ и $K_2: x^2 + y^2 - 8\sqrt{2}x + 4y = 0$. 4. Упатство: Провери дали точките се колинеарни (лежат на иста права), во тој случај не е определена кружница.
- а) $K: x^2 + y^2 + 6x + 2y - 31 = 0$; б) $K: x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. 5. а) $r = 10, p = 0, q = 2$; б) $r = 2, p = 1, q = -1$; г) $r = 2, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{3}$. 6. $K: x^2 + y^2 - 16x - 4y + 52 = 0$. 7. $K: (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$.
8. $K: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$. 9. $K: (x+4)^2 + (y+2)^2 = 16$. 10. $K: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 29$.
11. $K_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$. 12. $l_1: 2x - y - 6 = 0$. 13. Упатство: Определи го централното растојание $\overline{S_1S_2} = d$, а потоа дискутирај. а) Кружниците немаат заеднички точки и се надвор една од друга; б) Кружниците се сечат. 14. а) $l_1: x + 3 = 0$ и $l_2: 3x - 4y - 15 = 0$;
б) $l_1: 4x - 3y - 10 = 0, l_2: y - 2 = 0, l_3: 3x + 4y - 5 = 0$ и $l_4: x - 1 = 0$. 15. $\varphi = 90^\circ$ (тоа е аголот меѓу двете тангенти конструирани од точката Р). 16. $K: (x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$.
17. Упатство: Определи ги пресечните точки на двете кружници, а потоа напиши ги равенките на тангентите на секоја од нив во една од пресечните точки. Аголот меѓу тангентите е агол под кој се сечат кружниците. Во случајот $\varphi = 90^\circ$ (кружниците во тој случај се викаат ортогонални).
18. а) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$; б) $\frac{x^2}{100} + \frac{169y^2}{2500} = 1$; в) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1$. 19. $A_1(-5,0), A_2(5,0), B_1(0,-4), B_2(0,4), F_1(-3,0)$ и $F_2(3,0)$. 20. $M(\frac{2}{3}\sqrt{6}, 1)$ и $M_1(-\frac{2}{3}\sqrt{6}, 1)$. 21. $M_1(4,8; 4,8)$ и $M_2(-4,8; -4,8)$. 22. $n = \pm 12$.
23. $x + y \pm 10 = 0$. 24. $l_1: x - 5y + 9 = 0$ и $l_2: x + y - 3 = 0$. 25. $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$. 26. $9x^2 + 25y^2 = 225$.
27. $m = \pm 1$. 28. $M(2, \pm 4)$. 29. Упатство: Види го упатството на задачата 17, $\varphi = 90^\circ$.
30. $l_1: x - y + 3 = 0$ и $l_2: x + y + 3 = 0$. 31. $l_1: y = \frac{1}{2}x + 2$ и $l_2: y = -\frac{1}{2}x - 2$. 32. $\varphi = \arctg 18 (\varphi \approx 87^\circ)$.
33. Упатство: Квадрирај и среди ги равенките и ќе добиеш: а) елипса $9x^2 + 4y^2 = 144$;
б) $E: 25x^2 + 9y^2 = 225$; в) $E: 9x^2 + 4y^2 = 36$. 34. а) $5x^2 - 4y^2 = 20$; б) $100x^2 - 576y^2 = 57600$;
в) $x^2 - y^2 = 16$. 35. $H: 3x^2 - y^2 = 12$. 36. $6x^2 - 10y^2 = 60$. 37. а) $M_1(-3,0)$ и $M_2(5,8)$; б) $M(2,3)$;
в) немаат заеднички точки (тие се имагинарни). 38. а) $x^2 - y^2 = 144$; б) $7x^2 - 3y^2 = 148$.
39. $m = \pm 1$. 40. $m = \pm 5$. 41. $l: y = 2x \pm 1$. 42. $l_1: 2x - 3y \pm 1 = 0$ и $l_2: 2x + 3y \pm 1 = 0$.
43. $l_1: x - y \pm 1 = 0$ и $l_2: x + y \pm 1 = 0$. 44. $\varphi = 90^\circ$. 45. а), б), в) хиперболи. 46. $48x^2 + 64y^2 = 3072$.
47. а) $F(-2,0), x = 2$; б) $F(-\frac{3}{2}, 0), x = \frac{3}{2}$; в) $F(0, \frac{5}{2}), y = -\frac{5}{2}$; г) $F(0,-3), y = 3$. 48. а) $d = 3\sqrt{5}$; б) $d = 6\sqrt{2}$.
49. а) $\Pi: y^2 = 18x$; б) $\Pi: y^2 = -5x$. 50. а) $M_1(0,0), M_2(\frac{1}{2}, 1)$; б) $M_1(\frac{5}{4}, \frac{25}{4}), M_2(-1,4)$.
51. а) $M_1(2, \pm 2)$ и $M_2(8, \pm 4)$; б) $M(2, \pm 4)$; в) $M(6, \pm 6)$. 52. $\Pi: y^2 = 12x$. 53. $P(8,-3)$. 54. а) $\varphi = 90^\circ$;
б) $\varphi = 90^\circ$. 55. а) $l_1: x - y + 5 = 0, l_2: x + y + 5 = 0$; б) $l: y = \pm \frac{1}{2}x \pm \frac{9}{2}$; в) $l: y = \pm x \pm 4$;
г) $l: y = \pm 2x \pm 2$. 56. а), б), в) параболи.

PROSVETNO DELO

АЗБУЧНИК НА ПОИМИ

А

агол

- воопштен 40
- главен 103
- на депресија 119
- на елевација 119
- елементарен 40
- квадрантен 42
- козавршни 38
- меѓу две прави 183
- ориентиран 37
- полн 39
- рамен 39
- референтен 68
- амплитуда на функција 81
- асимптота на функција
- експоненцијална 11
- логаритамска 30
- тангенсна 78
- котангенсна 79
- хипербола 222

Б

биномна формула 144
биномни коефициенти 143

В

варијации

- без повторување 128
- со повторување 131

вектор

- алгебарска мера 160
- компоненти 163
- координати 162
- должина 161
- единичен (орт) 160
- еднакви 164
- колинеарни 160

веројатност

- класична дефиниција 153
- статистичка 147

Г

график на функција

- експоненцијална 10
- логаритамска 29
- косинусна 76
- котангенсна 79
- синусна 73
- тангенсна 77

Д

директриса на парабола 230

Е

елипса

- централна (канонична) равенка 211
- експеримент
- детерминиран 146
- недетерминиран 146

К

коефициент на правец 173
комбинации

- без повторување 138
- со повторување 140

координатен систем

- линеарен 160
- правоаголен 162

кружница

- општ вид равенка 199
- централна равенка 198

М

математичка индукција

- нецелосна 126
- целосна 126

множество на

- елементарни настани 150

Н

настан

- дисјунктен 150
- елементарен 150
- неможен 146
- неповолен 151
- поволен 151
- сигурен 146
- сложен 150
- случаен 146
- спротивен 151

нормала на

- елипса 218
- кружница 207
- парабола 237
- хипербола 228

нормални прави 185

нумерички ексцентрицитет на

- елипса 213
- хипербола 221

О

оска

- апсцисна 162
- имагинарна 221
- котангенсна 48
- ординатна 162
- тангентна 47
- реална 221

отсечка

- деление внатрешно 168
- деление надворешно 168
- средина 169

П

паралелни прави 185

параметар на

- елипса 213
- парабола 230
- хипербола 223

пермутации

- без повторување 133
- со повторување 135

пресек на

- две прави 182
- права и елипса 214
- права и кружница 202
- права и парабола 234
- права и хипербола 225

парабола

- директриса 230
- оска на симетрија 231
- темена (канонична) равенка 231

Р

равенка

- експоненцијална 16
- логаритамска 32
- тригонометриска 100

равенка на права

- експлицитен вид 173
- имплицитен вид (општа) 174
- низ една точка 176
- низ две точки 177
- нормален вид 188
- сегментен вид 179

радијан 38

растојание

- меѓу точки 166
- меѓу точка и права 191
- меѓу две прави 192

релативна честота 147

С

степен 38

Т

тангента на

- елипса 217
- кружница 206
- парабола 237
- хипербола 228

тежиште 179

тема на

- елипса 210
- парабола 231
- хипербола 224

теорема

- синусна 112
- косинусна 116

тригонометриска кружница 46

У

услов за допир на права и

- елипса 214
- кружница 202
- парабола 234
- хипербола 225

Ф

фокус на

- елипса 209
- парабола 230
- хипербола 220

функција

- експоненцијална 9
- косинусна 44
- котангенсна 45
- кружна 47
- логаритамска 27
- непарна 63
- парна 63
- синусна 44
- тангенсна 45

Х

хипербола

- равенка 221
- рамноострана 223

Акционерско друштво за издавање учебници и наставни средства
ПРОСВЕТНО ДЕЛО – Скопје, ул. „Димитрија Чуповски“ бр. 15

За издавачот
м-р Павле ПЕТРОВ, генерален директор

ЈОРДАНКА МИТЕВСКА
ИВАН ТРАЈКОВ
ЛИЛЈАНА ГРИБОВСКА – ПОПОВИЌ

МАТЕМАТИКА
за III ГОДИНА
на реформираното гимназиско образование

Лектор
Наталија ГЛИНСКА – РИСТОВА

Технички уредник
Новко ГРУЕВСКИ

Компјутерска подготовка
дипл. ел. инж. Михајло МАКАЗЛИЕВ

Коректура
Авторите

Ракописот е предаден во печат во август 2018 година. Печатењето е завршено во септември 2018 година. Обем: 272 страници. Формат: 20 x 25,5 см. примероци. Книгата е отпечатена во печатницата АД „Коста Абраш“ - Охрид.

PROSVETNO DELO

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

51(075.3)

МИТЕВСКА, Јорданка

Математика : за III година на реформираното гимназиско
образование / Јорданка Митевска, Иван Трајков, Лилјана
Грибовска - Поповиќ. - Скопје : Просветно дело, 2003. - 268 стр. :
илустр. ; 25 cm

ISBN 9989-0-0343-0

1. Трајков, Иван 2. Грибовска-Поповиќ, Лилјана. - I.
Поповиќ, Лилјана Грибовска-види Грибовска-Поповиќ, Лилјана

COBISS.MK-ID 54039562